VEKTORSKI PROSTORI I ELEMENTI VEKTORSKE ANALIZE

Ivanka Milošević

Univerzitet u Beogradu

1997

Predgovor

Kurs MATEMATIČKA FIZIKA I prvi put sam predavala 1995/1996 godine, pri čemu sam se velikom delu držla forme i sadržaja istog kursa koji je dugo godina na Katedri za kvantnu i matematičku fiziku Fizičkog fakulteta u Beogradu uspešno predavao profesor dr Milan Vujičić (čiji student sam i sama bila).

U prva tri poglavlja nema bitnih konceptualnih razlika u odnosu na udžbenik *Teorija unitarnih prostora*, prof. dr Milan Vujičića (PMF Beograd, 1980), ako se izuzmu primeri kojima se ukazuje na način korišćenja i proširenja sadržaja pojedinih pojmova u fizici. S druge strane u nastavku su tenzori uvedeni preko polilinearnih funkcionala, dok se osnovni pojmovi vektorske analize baziraju na operatorskim invarijantama. Bez obzira na ove izmene nadam se da ovaj udžbenik u izvesnom smislu nastavlja tradiciju deduktivnog pristupa problemu i davanja prednosti konceptima u odnosu na detalje, na čemu je i profesor Vujičić uvek insistirao.

U Beogradu, 1. novembra 1997. godine

I. M.

Sadržaj

UVOD

Pojam vektorskog prostora podrazumeva poznavanje algebarske strukture grupe i polja. Mada su one i same korišćene u fizici, u ovom kursu imaju pomoćnu ulogu, u okviru uvođenja osnovnih pojmova. Stoga će njihove definicije, već poznate sa prethodnih kurseva matematike, biti navedene samo kao podsetnik.

GRUPA

Definicija 0.1 Grupa *je uređeni par* $(G, \cdot)$ *nepraznog skupa* G *i binarne operacije "$\cdot$", pri čemu su zadovoljena sledeća četiri aksioma:*

(*i*) *Binarna operacija je* zatvorena*, tj. za svaka dva elementa* $a, b, \in G$ *važi* $a \cdot b \in G$. *Uređeni par* $(G, \cdot)$ *koji zadovoljava samo ovaj aksiom naziva se* grupoid.

(*ii*) *Binarna operacija je* asocijativna*, tj.* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *za svaka tri elementa* a, b, c *iz* G. *Asocijativni grupoid se naziva* polugrupa.

(*iii*) *U skupu* G *postoji jedinstveni* neutralni element*,* e*, takav da važi* $a \cdot e = e \cdot a = a$ *za svako* a *iz* G. *Polugrupa sa neutralnim elementom naziva se* monoid.

(*iv*) *Za svaki element* a *iz* G *postoji jedinstveni* inverzni element*,* a^{-1}*, iz* G*, takav da je* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Broj elemenata u grupi G *se naziva* red grupe *i označava sa* $\mid G \mid$. *Kada je* $\mid G \mid$ *konačan, kaže se da je grupa* G konačna*, inače je* beskonačna.

Navedeni skup aksioma nije minimalan. Naime, moguće je zahtevati egzistenciju samo levog (ili samo desnog) neutralnog i inverznog elementa (treći i četvrti aksiom), pa iz toga izvesti postojanje desnog (odnosno levog) neutralnog i inverznog elementa.

Definicija 0.2 *Grupa je* komutativna *ili* Abel-ova*, ako za svaka dva njena elementa* a *i* b *važi* $a \cdot b = b \cdot a$.

Kod Abel-ovih grupa grupna operacija se obično označava sa "+" i naziva *sabiranje*, dok se element e označava sa "0" i naziva *nulti*. Kod ostalih grupa se operacija najčešće naziva *grupno množenje*, znak operacije ne piše, a umesto neutralni, koristi se naziv *jedinični* element. Konačno, običaj je označavati grupu samo oznakom skupa, ukoliko se operacija podrazumeva iz konteksta.

Primeri

1. Skupovi celih, $\mathbb{Z}$, racionalnih, $\mathbb{Q}$, realnih, $\mathbb{R}$, i kompleksnih, $\mathbb{C}$, brojeva su beskonačne Abel-ove grupe u odnosu na operaciju sabiranja; neutralni element je 0, a inverzni od x je $-x$. Skupovi nenultih racionalnih, $\mathbb{Q}_0$, realnih, $\mathbb{R}_0$, i kompleksnih, $\mathbb{C}_0$, brojeva su beskonačne Abel-ove grupe u odnosu na množenje; neutralni element je 1, a inverzni od x je $1/x$.

2. Skup svih dvodimenzionalnih matrica oblika $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ je beskonačna Abel-ovu grupa u odnosu na operaciju matričnog množenja. Ova grupa predstavlja rotacije u ravni oko ose perpendikularne na tu ravan, dok je grupna operacija uzastopna rotacija. Elementi grupe su određeni parametrom φ (ugao rotacije), pomoću kojeg se grupno množenje zadaje izrazom $R(\varphi)R(\varphi') = R(\varphi + \varphi')$. Jedinična matrica $I_2 = R(0)$ je neutralni element, dok je inverzni element za $R(\varphi)$ jednak transponovanoj matrici: $R^{-1}(\varphi) = R^T(\varphi) = R(-\varphi)$.

3. Skup translacija u $\mathbb{R}^3$ čini Abel-ovu grupu u odnosu na operaciju uzastopnih translacija.

4. Skup svih transformacija koje ostavljaju fizički sistem nepromenjenim je grupa u odnosu na operaciju uzastopnog izvođenja tih transformacija. Ova grupa se zove *grupa simetrije* fizičkog sistema, a same transformacije se nazivaju *transformacije simetrije*, ili samo *simetrije* fizičkog sistema.

5. Skup permutacija n objekata, u odnosu na množenje permutacija (uzastopna primena permutacija), je tzv. *simetrična* ili *permutaciona* grupa, koja se označava sa S_n. Red grupe je $\mid G \mid = n!$. Na primer, elementi grupe S_3 su $\{\, e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$. Neutralni element je e. Transpozicije a, b i c su, naravno, same sebi inverzne ($a^2 = b^2 = c^2 = e$), dok su d i f uzajamno inverzni ($d \cdot f = e$). Grupa S_3 nije Abel-ova.

POLJE

Definicija 0.3 Polje *ili* komutativno telo *je trojka* $\{\mathbb{F}, +, \cdot\}$ *skupa* $\mathbb{F}$ *i dve zatvorene binarne operacije, koja zadovoljava sledeće aksiome:*

(*i*) *par* $\{\mathbb{F}, +\}$ *je Abel-ova grupa čiji je neutralni element* 0*;*

(*ii*) *par* $\{\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot\}$ *je Abel-ova grupa čiji je neutralni element* 1*;*

(*iii*) *važi zakon distribucije:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *za svako* a, b, $c \in \mathbb{F}$.

Skupovi realnih $\mathbb{R}$ i kompleksnih $\mathbb{C}$ brojeva sa operacijama sabiranja i množenja brojeva su najpoznatija polja, i u nastavku će jedino ona biti korišćena.

Skup uređenih parova realnih brojeva, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, postaje polje kompleksnih brojeva, $\mathbb{C}$, ako se operacije sabiranja i množenja definišu preko odgovarajućih operacija u $\mathbb{R}$:

$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2) = (a_1+a_2,\ b_1+b_2),\ (a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = (a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+a_2b_1), \quad \forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Glava 1

VEKTORSKI PROSTORI

1.1 DEFINICIJA I PRIMERI

Definicija 1.1 *Neka skup V ima strukturu Abel-ove grupe u odnosu na sabiranje. Elemente skupa V zovemo* vektori*. Neutralni element označavamo sa* 0 *i zovemo* nulti vektor*.*

Neka skup $\mathbb{F}$ ima strukturu polja. Elemente skupa $\mathbb{F}$ zovemo skalari*, a neutralne elemente u odnosu na dve binarne operacije označavamo sa* 0 *i* 1*.*

Na skupu $\mathbb{F}\times V$ definisano je množenje vektora skalarom, tj. preslikavanje $\mathbb{F}\times V \longrightarrow V$, koje svakom skalaru $\alpha \in \mathbb{F}$ i svakom vektoru $x \in V$ pridružuje vektor $\alpha x \in V$, tako da su ispunjeni aksiomi:

(i) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall x \in V$ *(zakon asocijacije);*

(ii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall x, y \in V$ *(zakon distribucije za sabiranje vektora);*

(iii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall x \in V$ *(zakon distribucije za sabiranje skalara);*

(iv) $1x = x,\ \forall x \in V$.

Ovako definisano preslikavanje se zove množenje vektora skalarom, dok se V naziva vektorski prostor *nad poljem $\mathbb{F}$ i piše $V(\mathbb{F})$.*

Uobičajeno je da se vektorski prostori nad poljem realnih, odnosno kompleksnih brojeva nazivaju *realni*, odnosno *kompleksni vektorski prostori.*

Primeri

1. Za svaki prirodni broj n, skup $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{n}$ *brojnih kolona* od n kompleksnih brojeva je kompleksni vektorski prostor, ako je sabiranje vektora i množenje vektora skalarom definisano na sledeći način:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n;$$

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Neutralni element u $\mathbb{C}^n$ je nulti vektor 0, a inverzni element elementa x je $-x$:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad -x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

Specijalno, skup realnih brojeva je vektorski prostor nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva, tj. $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Slično je $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$.

2. Skup *matrica* tipa $m \times n$ sa matričnim elementima koji pripadaju nekom polju[1] $\mathbb{F}$, sa standardnom definicijom sabiranja matrica i množenja matrice skalarom (iz polja $\mathbb{F}$), je takođe primer vektorskog prostora nad poljem $\mathbb{F}$. Nulti vektor je matrica 0 (čiji su svi elementi nule). Za ovaj prostor koristi se oznaka $\mathbb{F}^{mn}$, odnosno $\mathbb{R}^{mn}$ i $\mathbb{C}^{mn}$ za konkretne izbore polja. Očigledno je da su brojne kolone (prethodni primer) specijalni slučaj vektorskog polja $\mathbb{F}^{mn}$, za $n = 1$, tj. $\mathbb{F}^{m1} = \mathbb{F}^m$.

3. Skup $P_n(\mathbb{F})$, svih *polinoma* $\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots \alpha_{n-1} t^{n-1}$ ($\alpha_i, t \in \mathbb{F}$) stepena manjeg od $n \in \mathbb{N}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ sa standardno definisanim zbirom polinoma i množenjem polinoma skalarom iz $\mathbb{F}$. Treba zapaziti da skup polinoma fiksiranog stepena nije vektorski prostor.

4. Neka je X proizvoljan neprazan skup i neka je $X^{\mathbb{F}}$ *skup svih funkcija* definisanih na skupu X a sa vrednostima u polju $\mathbb{F}$. Sabiranje u $X^{\mathbb{F}}$ je definisano na standardan način:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in X^{\mathbb{F}}, \ \forall x \in X,$$

kao i množenje funkcije skalarom:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall f \in X^{\mathbb{F}}, \ \forall x \in X.$$

Time je definisan vektorski prostor funkcija $X^{\mathbb{F}}$ nad poljem $\mathbb{F}$.

Konkretna realizacija je skup $C(a, b)$ svih realnih neprekidnih funkcija definisanih na intervalu $[a, b]$.

5. U klasičnoj mehanici je dinamičko stanje slobodne čestice (u nekom vremenskom trenutku) određeno njenim radijus vektorom $\mathbf{r}$ i impulsom $\mathbf{p}$, tj. vektorom $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)^T$, iz tzv. *faznog prostora* čestice. Bilo koji vektor iz tog prostora određuje dinamičko stanje te čestice. Slično, stanje dve slobodne čestice određeno je vektorom $(x_1, \ldots, z_2, p_{1x}, \ldots, p_{2z})^T$ iz 12-dimenzionalnog faznog prostora. Ovo se lako uopštava na sistem više čestica, kao i na sisteme koji interaguju. Pri tome, za neke posebne tipove interakcija, skup mogućih

[1] U daljem tekstu, kad god ne bude potrebe za konkretnom specifikacijom polja koristiće se oznaka $\mathbb{F}$.

položaja sistema ne mora biti vektorski prostor (to se prenosi i na fazni prostor), već nešto opštija matematička struktura (tzv. mnogostrukost). Dobar primer je čestica vezana za kružnicu, čiji fazni prostor očigledno nije vektorski prostor.

S druge strane, u kvantnoj mehanici je svako stanje kvantnog sistema predstavljeno nekim vektorom u *prostoru stanja* $\mathcal{H}$ datog sistema i obratno, svaki vektor iz $\mathcal{H}$ u principu predstavlja moguće stanje datog kvantnog sistema (tzv. postulat o stanjima).

Više o pomenutim pojmovima će se učiti na kasnijim kursevima teorijske i kvantne mehanike.

Navedeni primeri pokazuju da po svojoj prirodi veoma različiti entiteti imaju istu strukturu — strukturu vektorskog prostora.

1.2 DIMENZIJA VEKTORSKOG PROSTORA

1.2.1 Linearna (ne)zavisnost

Definicija vektorskog prostora kao operacije sa vektorima uvodi sabiranje vektora i množenje vektora skalarom. Stoga svaki podskup prostora, ovim operacijama generiše jedan širi skup. U posebnim slučajevima podskup generiše ceo prostor, te se u takvim situacijama proučavanje prostora može svesti na proučavanje podskupa.

Definicija 1.2 *Neka je* $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *podskup vektorskog prostora* $V(\mathbb{F})$*.* Linearna kombinacija *vektora iz* X *je svaki vektor oblika* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$*, gde su* α_i *elementi polja* $\mathbb{F}$*, tzv.* koeficijenti *kombinacije. Skup* $L(X)$ *svih linearnih kombinacija vektora iz* X *naziva se* lineal *nad* X*.*

Skup X *je* obrazujući*, ako je* $L(X) = V(\mathbb{F})$*, tj. ako je svaki vektor iz* $V(\mathbb{F})$ *linearna kombinacija vektora iz* X*. Skup* X *je* linearno nezavisan *ako iz jednakost* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, $(\alpha_i \in \mathbb{F})$ *sledi* $\alpha_i = 0$ *za sve vrednosti* i*; kaže se da je* X linearno zavisan *skup, ako nije linearno nezavisan, tj. ako postoji linearna kombinacija vektora iz* X *koja je jednaka nultom vektoru, a u kojoj je bar jedan koeficijent različit od nule.*

Pojam linearne kombinacije obuhvata obe operacije sa vektorima, te potpuno odražava strukturu vektorskog prostora. U tom smislu linearna kombinacija je bitna karakteristika vektorskog prostora, koja ga razlikuje od ostalih struktura: može se reći da je vektorski prostor svaki skup koji je zatvoren za linearne kombinacije, tj. koji sadrži svaku linearnu kombinaciju svojih elemenata. Zahtev da skup sadrži sve linearne kombinacije svojih elemenata se u kvantnoj mehanici postulira za skup svih stanja kvantnog sistema, tzv. *princip superpozicije*, čime se ovaj skup zapravo i definiše kao vektorski prostor.

Primeri

1. Svaki skup vektora koji sadrži nulti vektor je linearno zavisan: ako je $X = \{x_1 = 0, x_2, \ldots\}$, tada je za $\alpha_i = 0$ pri $i > 1$, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots = 0$, za svako α_1, pa i $\alpha_1 \neq 0$.

2. Linearna zavisnost dva nenulta vektora ekvivalentna je njihovoj kolinearnosti: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, uz $\alpha_2 \neq 0$ (ili $\alpha_1 \neq 0$), povlači $\alpha_1 \neq 0$ (tj. $\alpha_2 \neq 0$) i $x_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1$.

3. Bilo koja dva nenulta nekolinearna vektora u ravni (prostor $\mathbb{R}^2$) su linearno nezavisna, i čine obrazujući skup. S druge strane, tri vektora u ravni su linearno zavisna, a obrazuju ravan ukoliko nisu svi kolinearni.

4. Skup vektora $\{x_0(t) = 1,\, x_1(t) = t,\, x_2(t) = t^2,\, \ldots,\, x_{n-1}(t) = t^{n-1}\}$ iz prostora polinoma $P_n(\mathbb{F})$ je linearno nezavisan jer iz polinomskog identiteta $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_i(t) \equiv 0$ sledi $\alpha_i = 0$, $\forall\, i$. Pri tome je svaki polinom stepena manjeg od n linearna kombinacija ovih vektora, te su oni obrazujući skup.

Lema 1.1 *Skup nenultih vektora $X = \{x_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ iz $V(\mathbb{F})$ je linearno zavisan ako i samo ako je neki vektor x_i, $2 \le i \le n$, linearna kombinacija prethodnih vektora:*

$$x_i = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{i-1} x_{i-1}.$$

▬ *Dokaz:* Neka je i-ti element skupa X linearna kombinacija prethodnih, tj. $x_i = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{i-1} x_{i-1}$. Tada je $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{i-1} x_{i-1} - x_i + 0 x_{i+1} + \ldots + 0 x_n = 0$. Koeficijent uz x_i je različit od nule. Skup X je linearno zavisan.
Neka je skup X linearno zavisan. Tada postoji skup skalara $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, od kojih je bar jedan nenulti, tako da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Neka je $k \le n$ najveći celi broj takav da je $\alpha_k \ne 0$. Pri tome α_k ne može biti jedini nenulti koeficijent, jer bi to značilo da je $\alpha_k x_k = 0$, tj. $x_k = 0$, suprotno pretpostavci tvrđenja. Stoga je $k > 1$. Odavde sledi $x_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} x_1 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} x_{k-1}$, tj. vektor x_k je linearna kombinacija prethodnih vektora. ▮

1.2.2 Bazis i dimenzija

Svi nenulti vektori na datoj pravoj su međusobno proporcionalni, tj. linearno zavisni. U ravni su svaka dva nenulta nekolinearna vektora linearno nezavisna, ali su već svaka tri vektora, koja pripadaju istoj ravni, linearno zavisna. Dakle, maksimalan broj linearno nezavisnih vektora na pravoj i u ravni se poklapa sa onim što se u geometriji zove dimenzija prave i dimenzija ravni.

Definicija 1.3 Bazis *vektorskog prostora V je svaki linearno nezavisan i obrazujući skup.*

Jasno je da u istom vektorskom prostoru postoji više, čak kontinuum bazisa (osim u slučaju prostora $\{0\}$). Međutim, svi bazisi istog prostora imaju jednak broj elemenata, što će odmah biti pokazano:

Teorem 1.1 *Broj elemenata bazisa konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V je isti kao i broj elemenata bilo kog drugog bazisa istog prostora.*

▬ *Dokaz:* Neka su $B_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i $B_m = \{v_1', \ldots, v_m'\}$ dva bazisa u prostoru V.
Skup $S_1 = \{v_m', v_1, \ldots, v_n\}$ je, očigledno, linearno zavisan i obrazuje prostor V. Na osnovu leme 1.1, neki od vektora v_i je linearna kombinacija prethodnih vektora iz skupa S_1. Izbacivanjem takvog vektora v_i iz skupa S_1 dobija se novi skup $S_1' = \{v_m', v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ koji takođe obrazuje prostor V.
Skup $S_2 = \{v_{m-1}', v_m', v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$, je (kao i skup S_1) linearno zavisan i obrazuje V. Može se sada, analogno formiranju skupa S_1' iz skupa S_1, formirati skup S_2', s tim što vektor v_m'

ne može biti linearna kombinacija prethodnih vektora zbog osobine linearne nezavisnosti bazisnih vektora. Na taj način se dobija novi skup S_2', koji obrazuje V i u kome su dva vektora bazisa B_n zamenjena sa dva vektora bazisa B_m.
Produžavanjem opisanog postupka zamene vektora iz B_n vektorima iz B_m, postavlja se pitanje da li je moguće da vektori v_i budu iscrpljeni pre vektora v_i', odnosno da li je $n < m$. Očigledno, to nije moguće, jer bi se tada preostalih $m-n$ vektora iz B_m moglo izraziti kao linearna kombinacija onih vektora v_i' $(i = 1, \ldots, n)$ koji su zamenili n vektora iz B_n a to je u suprotnosti sa linearnom nezavisnošću vektora bazisa B_m. Dakle, postupak zamene se završava kada svih m vektora iz B_m zameni m vektora iz B_n. Time je pokazano da je $n \geq m$.
Sada treba zapaziti da je u gornjem delu dokaza iskorišćena definicija bazisa samo delimično. Naime, u slučaju bazisa B_n insistirano je samo na osobini da on obrazuje prostor V, dok je u slučaju bazisa B_m korišćena samo osobina linearne nezavisnosti bazisnih vektora. Zato je moguće ponoviti celi postupak pri zamenjenim "ulogama" bazisa B_n i B_m, čime se očigledno dolazi do zaključka da je $m \geq n$.
Dakle iz $n \geq m$ i $m \geq n$ sledi $n = m$, tj. iz činjenice da je broj obrazujućih vektora prostora V veći ili jednak od broja linearno nezavisnih vektora iz istog prostora, sledi da je broj elemenata u različitim bazisima tog prostora isti. ∎

Definicija 1.4 Dimenzija *vektorskog prostora je broj vektora u bazisu prostora. Prostor je* konačnodimenzionalan *ako mu je dimenzija konačna, inače je* beskonačnodimenzionalan*. Prostor* $\{0\}$*, koji se sastoji samo od nultog vektora je dimenzije nula.*

Za dimenziju vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$ se koriste oznake $\dim V$ i $\mid V \mid$; kada se želi naglasiti da je $V(\mathbb{F})$ n-dimenzionalni prostor, piše se $V_n(\mathbb{F})$.

Značaj pojma bazisa se ogleda u mogućnosti da se ceo vektorski prostor zada samo bazisom, pa da se ostali vektori dobiju kao linearne kombinacije bazisnih.

Definicija 1.5 *Neka je* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *bazis u* n*-dimenzionalnom vektorskom prostoru* $V_n(\mathbb{F})$ *i neka je vektor* $x \in V(\mathbb{F})$ *linearna kombinacija bazisnih vektora:* $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i$*. Za skalare* ξ_i, $(i = 1, \ldots, n)$ *se kaže da su* koordinate *vektora* $x \in V_n(\mathbb{F})$ *u bazisu* $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Teorem 1.2 *Svaki vektor iz prostora* $V_n(\mathbb{F})$ *ima jedinstvene koordinate u datom fiksiranom bazisu.*

∎ *Dokaz:* Neka je $\{v_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ bazis u $V_n(\mathbb{F})$. Onda se svaki vektor $x \in V_n$ može napisati kao linearna kombinacija bazisnih vektora: $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i$. Pretpostavimo da se vektor x može izraziti i kao neka druga linearna kombinacija istih bazisnih vektora: $x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i$. Iz $x - x = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i) v_i = 0$, sledi $\xi_i = \eta_i$, $\forall i$, zbog linearne nezavisnosti bazisnih vektora. ∎

Primeri

1. Na pravoj (prostor $\mathbb{R}$) svaki nenulti vektor, tj. svaki nenulti realni broj čini bazis. Prostor je jednodimenzionalan.

2. U prostoru $\mathbb{R}^3$ svaki vektor se može izraziti kao linearna kombinacija sledeća tri vektora:
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
koji čine tzv. *apsolutni bazis.*

3. Direktnom generalizacijom prethodnog primera dobija se apsolutni bazis n-dimenzionalnog prostora $\mathbb{F}^n$:
$$\{ e_i = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \vdots \\ \delta_{ni} \end{pmatrix} \,|\, i = 1, \ldots, n \}, \text{ gde je } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases} \; Kronecker - ova\ delta.$$

4. Apsolutni, ili *Weyl-ov bazis* u prostoru matrica $\mathbb{F}^{mn}$ je skup $\{E_{ij} \,|\, i = 1, \ldots, m;\, j = 1, \ldots, n\}$, gde su E_{ij} matrice čiji ij-ti element je jedinica, dok su svi ostali elementi nule, tj. $(E_{ij})_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$:
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$
Dakle, dimenzija ovog prostora je $m\,n$.

5. U prostoru polinoma stepena manjeg od n, $P_n(\mathbb{F})$, skup vektora $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$ je linearno nezavisan i obrazujući, tj. čini bazis n-dimenzionalnog prostora $P_n(\mathbb{F})$.

6. U prostoru svih polinoma, $P(\mathbb{F})$, skup vektora $\{t^n \,|\, n = 0, 1, \ldots\}$ čini bazis. Prostor je beskonačnodimenzionalan.

7. Vektorski prostor kompleksnih brojeva nad poljem kompleksnih brojeva, $\mathbb{C}(\mathbb{C})$, je jednodimenzionalan, jer bilo koji nenulti kompleksni broj predstavlja bazis tog prostora.

8. Vektorski prostor kompleksnih brojeva nad poljem realnih brojeva, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, je dvodimenzionalan jer je skup $\{1, \imath\}$ jedan bazis tog prostora.

1.2.3 Izomorfizam

Kao što je već rečeno, u datom bazisu $\{v_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ vektorskog prostora $V_n(\mathbb{F})$, svakom vektoru $x \in V_n(\mathbb{F})$ jednoznačno se pridružuje skup skalara iz $\mathbb{F}$ (koordinate $\xi_i \in \mathbb{F}$; $i = 1, \ldots, n$). Ovo pridruživanje omogućava da se svaki vektorski prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ identifikuje sa prostorom brojnih kolona $\mathbb{F}^n$. Tema ovog odeljka je uspostavljanje te identifikacije.

Definicija 1.6 *Kaže se da je vektorski prostor $V(\mathbb{F})$* izomorfan *sa vektorskim prostorom $V'(\mathbb{F})$, što se označava sa $V \cong V'$, ako postoji bijekcija $f : V \longrightarrow V'$, takva da je*
$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Vidi se da je izomorfizam bijekcija koja linearnu kombinaciju predlikova (vektora iz V) prevodi u istu takvu linearnu kombinaciju likova (vektora iz V'), te se može reći da je izomorfizam bijekcija koja održava algebarsku strukturu vektorskog prostora. Treba zapaziti da je u pojam strukture uključeno i polje, te je izomorfizam moguć samo među prostorima nad istim poljem. Lako se pokazuje da izomorfizam na skupu svih vektorskih prostora uspostavlja *relaciju ekvivalencije*.

Teorem 1.3 *Svaki vektorski prostor $V_n(\mathbb{F})$ je izomorfan prostoru $\mathbb{F}^n$: $V_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^n$.*

▬ *Dokaz:* Neka je $\{v_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ bazis u prostoru $V_n(\mathbb{F})$. Svaki vektor $x \in V_n(\mathbb{F})$ se može izraziti kao linearna kombinacija bazisnih vektora: $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$, pri čemu su koordinate ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$ jednoznačno određene (Teorem 1.2). Na taj način je ostvarena bijekcija $f : V_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}^n$, tj. $f(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$. Neka je $y = \sum_{i=1}^n \eta_i v_i \in V_n(\mathbb{F})$, tj. $f(y) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$. Tada je $\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i v_i + \beta \sum_{i=1}^n \eta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha\xi_i + \beta\eta_i) v_i$, odnosno $f(\alpha x + \beta y) = \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\eta_1 \\ \vdots \\ \alpha\xi_n + \beta\eta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Time je pokazano da je bijekcija f, određena izborom bazisa u $V_n(\mathbb{F})$, izomorfizam. ▮

Pošto je izomorfizam relacija ekvivalencije, prethodni teorem znači da u svakoj klasi izomorfnih vektorskih prostora postoji tačno jedan standardni prostor kolona $\mathbb{F}^n$, te je cela klasa izomorfnih prostora određena dimenzijom i poljem. Drugim rečima, svi vektorski prostori iste dimenzije nad istim poljem su međusobno izomorfni, čime dimenzija postaje bitna osobina vektorskog prostora koja ga određuje do na izomorfizam (pri zadatom polju).

Izomorfizam iz teorema 1.3 se naziva *reprezentovanje* vektora iz prostora $V_n(\mathbb{F})$ brojnim kolonama iz $\mathbb{F}^n$, ostvareno izborom bazisa u $V_n(\mathbb{F})$. Jasno, pri drugačijem izboru bazisa, kolona koja reprezentuje isti vektor iz $V(\mathbb{F})$ je drugačija, o čemu će biti reči u narednim poglavljima.

U daljem tekstu će osnovne osobine vektorskih prostora biti date na nivou apstraktnih prostora, čime se izbegava dokazivanje nezavisnosti tih osobina od konkretnog izbora bazisa. Sa svoje strane, teorem 1.3 je koristan sa operativne tačke gledišta, jer daje recept kako apstraktni problem svesti na račun sa skalarima, čime direktno omogućava konkretno izračunavanje određenih, u fizici potrebnih, veličina.

1.3 UNITARNI I EUKLIDSKI PROSTOR

Pojmovi dužine, ugla, rastojanja itd., u fiziku su ušli da bi se dobila kvantifikacija, a time i egzaktnost iskaza. Oni generališu iskustvo stečeno u običnom prostoru $\mathbb{R}^3$. Stoga se i uvode na isti način kao u $\mathbb{R}^3$, uz pomoć *skalarnog proizvoda*. Npr. dužina vektora $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ iz $\mathbb{R}^3$ je $\| \vec{r} \| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a ugao φ između vektora $\vec{r}$ i $\vec{r}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$ je određen relacijom $\cos\varphi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\| \vec{r} \| \| \vec{r}' \|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\| \vec{r} \| \| \vec{r}' \|}$.

1.3.1 Skalarni proizvod

Definicija 1.7 Skalarni proizvod *u prostoru* $V(\mathbb{F})$ *je preslikavanje* $(\,,\,): \; V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$, *koje svakom uređenom paru vektora* x_1, $x_2 \in V$ *pridružije skalar* $(x_1, x_2) \in \mathbb{F}$, *i ima sledeće osobine:*

(*i*) $(x_1, x_2) = (x_2, x_1)^*$, $\forall x_1, x_2 \in V$ (hermitska simetrija)*;*

(*ii*) $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha^*(x_1, y) + \beta^*(x_2, y)$, $\forall\, x_1, x_2, y \in V$, $\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{F}$ (antilinearnost po prvom faktoru) [2]*;*

(*iii*) $(x, x) \geq 0$, $\forall x \in V$, *pri čemu je* $(x, x) = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$ (stroga pozitivnost *ili* pozitivna definitnost).

Vektorski prostor sa ovako definisanim skalarnim proizvodom se naziva unitarni prostor*, ukoliko je nad kompleksnim poljem, dok je za* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *naziv* euklidski prostor*.*

Osobina hermitske simetrije povlači da je (x, x) uvek realan broj, što daje smisao zahtevu stroge pozitivnosti, (*iii*), i za realni i za kompleksni vektorski prostor. Iz osobina (*i*) i (*ii*) sledi linearnost skalarnog proizvoda po drugom faktoru (za takva preslikavanja, linearna po jednom, a antilinearna po drugom argumentu, kaže se da su *konjugovano bilinearna*). Jasno je da se u slučaju realnog vektorskog prostora konjugacija u (*i*) i (*ii*) može izostaviti, te je skalarni proizvod u euklidskom prostoru simetričan i bilinearan (linearan po oba faktora).

Izomorfizam dva vektorska prostora $V(\mathbb{F})$ i $V'(\mathbb{F})$ sa skalarnim proizvodima ($(\,,\,)$ i $(\,,\,)'$, respektivno) je preslikavanje f koje je izomorfizam u smislu definicije 1.6, ali je i *izometrijsko preslikavanje*: za svako x i y iz $V(\mathbb{F})$ važi $(x, y) = (f(x), f(y))'$.

Treba uočiti da je skalarni proizvod dodatna struktura u vektorskom prostoru, koja se posebno definiše, te se u istom vektorskom prostoru mogu definisati različiti skalarni proizvodi, i tako dobiti različiti unitarni, odnosno euklidski prostori. Osobina linearnosti po drugom i (anti)linearnosti po prvom faktoru pokazuje da je skalarni proizvod moguće zadati koristeći samo vektore nekog bazisa. Naime, ako je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bazis u vektorskom prostoru sa skalarnim proizvodom i $m_{ij} = (v_i, v_j)$, onda se za proizvoljna dva vektora $x = \sum_i \xi_i v_i$ i $y = \sum_i \eta_i v_i$ nalazi $(x, y) = \sum_{i,j} \xi_i^* m_{ij} \eta_j$. Koristeći reprezentativne kolone $\mathtt{x}$ i $\mathtt{y}$ vektora x i y u datom bazisu i označavajući sa $\mathtt{x}^\dagger$ vrstu dobijenu od $\mathtt{x}$ transponovanjem i konjugovanjem, a sa M matricu čiji su elementi m_{ij}, poslednji izraz se može napisati u formi $(x, y) = \mathtt{x}^\dagger M \mathtt{y}$. Jasno je da je matrica M, pri zadatom bazisu, određena skalarnim proizvodom, te se ona naziva *metrika* ili *metrički tenzor*. Međutim, kako je upravo pokazano, matrica M u potpunosti definiše skalarni proizvod, te se postavlja pitanje da li se svaka matrica može uzeti za metriku, tj. da li će za svako M biti zadovoljene tri osobine skalarnog proizvoda. Nije teško pokazati da iz prve osobine sledi da mora biti $M = M^\dagger$, a da je za treću potrebno i dovoljno da je M pozitivna matrica. U fizici se ponekad moraju razmatrati i nešto opštiji skalarni proizvodi, kod kojih se ne zahteva osobina stroge pozitivnosti, odnosno metrika nije pozitivna matrica; ovo uopštenje nosi naziv *indefinitna metrika*. Ipak, i u takvim situacijama se najčešće ispostavlja da je potrebna metrika nesingularna, tj. da je $\det M \neq 0$.

[2] U literaturi, pre svega matematičkoj, nailazi se i na nešto drugačiju definiciju, u kojoj se zahteva antilinearnost skalarnog proizvoda po drugom faktoru. Za potrebe kvantne mehanike je pogodnija gornja definicija, jer olakšava uvođenje tzv. Dirac-ove notacije, koja će biti kasnije razmotrena (odeljak 4.5.11).

Kao što je napomenuto, skalarni proizvod dozvoljava uvođenje novih, intuitivno prepoznatljivih pojmova. *Norma* ili *dužina* vektora x, se definiše kao $\| x \| \stackrel{\text{def}}{=} (x,x)^{1/2}$. Slično, *rastojanje* (*distanca*, *udaljenost*) vektora x_1 i x_2 iz $V(\mathbb{F})$ je norma njihove razlike: $d(x_1,x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \| x_1 - x_2 \|$. Konačno, ugao φ među vektorima x i y iz euklidskog prostora je zadat izrazom $\cos\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(x,y)}{\| x \| \| y \|}$.

Primeri

1. *Standardni skalarni proizvod* vektora $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ iz unitarnog prostora $\mathbb{C}^n$ je $(x,y) = \sum_{i=1}^n \xi_i^* \eta_i$; ako $x^\dagger$ označava brojnu vrstu dobijenu transponovanjem i konjugovanjem kolone x, može se pisati $(x,y) = x^\dagger y = x^\dagger I y$ (I je jedinična matrica dimenzije n). Vidi se da je metrika standardnog skalarnog proizvoda u apsolutnom bazisu upravo jedinična matrica. Najopštiji oblik skalarnog proizvoda u istom prostoru je $(x,y) = x^\dagger M y$, gde je M pozitivna matrica.

2. U prostoru matrica $\mathbb{C}^{nm}$, *standardni* skalarni proizvod je definisan izrazom $(A,B) = \mathrm{Tr}\, A^\dagger B$. Specijalni slučaj za $m = 1$ je prethodno uvedeni standardni skalarni proizvod u $\mathbb{C}^n$:

$$(x,y) = \mathrm{Tr}\, x^\dagger y = \mathrm{Tr}\, \begin{pmatrix} \xi_1^* & \ldots & \xi_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \mathrm{Tr} \sum_{i=1}^n \xi_i^* \eta_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^* \eta_i = x^\dagger y.$$

   Kod prostora $\mathbb{R}^{nm}$ se standardni skalarni proizvod zadaje na isti način, pri čemu se konjugacija može izostaviti.

3. U prostoru polinoma $P(\mathbb{C})$ na intervalu $[a,b]$ standardni skalarni proizvod je dat relacijom $(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x^*(t) y(t)\, \mathrm{d}t$. To je specijalan slučaj skalarnog proizvoda $(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x^*(t) y(t) \rho(t)\, \mathrm{d}t$, gde je *težinska funkcija* ili *metrika* ρ pozitivna na intervalu $[a,b]$.

4. Teorija relativnosti koristi *prostor Minkowskog*: to je 4-dimenzionalni realni vektorski prostor $\mathbb{R}^4$, u kome je skalarni proizvod vektora zadat nesingularnom indefinitnom metrikom $M = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$. Kolona se obično piše u formi $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T = (ct, \vec{r})^T$, pri čemu prva koordinata, $x_0 = ct$ određuje vreme (c je konstanta, preciznije brzina svetlosti), a ostale tri prostorni položaj nekog događaja. Uočava se da izraz (x,x) može biti pozitivan (tada se kaže da je x *vremenski vektor*, npr. $x = (x_0,0,0,0)^T$), ali i negativan (x je *prostorni vektor*, npr. $x = (0, x_1, x_2, x_3)^T$), ili jednak nuli (kada se govori o *svetlosnom* ili *izotropnom vektoru*, npr. $x = (\sqrt{\sum_{i=1}^3 {x_i}^2}, x_1, x_2, x_3)^T$). Jasno je da izvedeni pojmovi rastojanja i dužine, u slučaju indefinitne metrike ne mogu zadržati uobičajeni smisao.

1.3.2 Ortonormiranost

Već iz elementarnog trodimenzionalnog vektorskog računa je poznato da dva vektora koji zaklapaju prav ugao, tj. *ortogonalni* su, imaju niz karakterističnih svojstava. Ovo važi i za pravu koja je perpendikularna na ravan, ili dve perpendikularne ravni. Pri tome je jasno da ortogonalnost, intuitivno definisana preko ugla, zapravo govori o skalarnom proizvodu datih vektora. Slično, korišćenjem dužine, odnosno norme, pa time i skalarnog proizvoda, uvode se vektori jedinične dužine, *normirani vektori*, koji takođe tim svojstvom omogućavaju niz tehničkih prednosti pri vektorskom računu. Generalizaciju ovih pojmova daje

Definicija 1.8 *Skup $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ vektora iz unitarnog (euklidskog) prostora U je* ortogonalan *ako je $(x_i, x_j) = 0$ za $i \neq j$; skup X je* normiran *ako za svako i važi $(x_i, x_i) = 1$. Skup X je* ortonormiran *ako je ortogonalan i normiran, tj. važi $(x_i, x_j) = \delta_{ij},\ (i, j = 1, \dots, k)$. Elementi ortonormiranog skupa zovu se* ortovi*. Ortonormirani skup X je* kompletan *ako je samo nulti vektor ortogonalan na sve elemente skupa.*

Dakle, ortonormirani skup čine uzajamno ortogonalni ortovi (vektori jedinične norme). Uočava se da je ortogonalnost potpuno simetrična relacija, iako je skalarni proizvod samo hermitski simetričan: iz $(x, y) = 0$ sledi $(y, x)^* = 0$, pa i $(y, x) = 0$.

Nulti vektor je, očigledno, ortogonalan na sve vektore prostora, i to je jedini vektor sa takvom osobinom. U stvari, to je jedini vektor koji je ortogonalan na sebe, što sledi iz stroge pozitivnosti skalarnog proizvoda. Ovi zaključci se mogu izmeniti u slučaju indefinitne metrike.

Odnos ortonormiranosti i linearne nezavisnosti opisuje

Teorem 1.4 *Svaki ortonormirani skup vektora je linearno nezavisan.*

▬ *Dokaz:* Neka je $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ ortonormiran skup. Treba pokazati da iz $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$ sledi $\alpha_i = 0$ za svako i. Ako se prethodna relacija pomnoži skalarno s leva proizvoljnim vektorom iz skupa X, npr. sa x_j, dobija se $(x_j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i (x_j, x_i) = \sum_i \alpha_i \delta_{ji} = \alpha_j = 0$, pri čemu je iskorišćena osobina linearnosti skalarnog proizvoda po drugom faktoru i definicija ortonormiranog skupa. Pošto je vektor x_j bio proizvoljan, sledi da su svi koeficijenti α_i gornje linearne kombinacije jednaki nuli. ▮

Dakle, ortonormiranost povlači linearnu nezavisnost, pa je svaki ortonormirani obrazujući skup jedan bazis, tzv. *ortonormirani bazis* prostora sa skalarnim proizvodom.

1.3.3 Bessel-ova i Schwarz-ova nejednakost

Značaj i primena skalarnog proizvoda i ortonormiranih skupova počiva na nizu osobina koje su razmotrene u ovom odeljku.

Teorem 1.5 *Neka je $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ neki konačan ortonormiran skup vektora u unitarnom (euklidskom) prostoru U. Za proizvoljan vektor x iz prostora U važi:*

(*i*) Bessel-ova nejednakost*:*

$$\sum_{i=1}^{k} |\ (x_i, x)\ |^2 \leq ||\ x\ ||^2;$$

(*ii*) *Vektor $x' = x - \sum_{i=1}^{k} (x_i, x) x_i$ je ortogonalan na svaki vektor iz skupa X.*

▬ *Dokaz:* (*i*) $0 \leq ||\ x'\ ||^2 = (x', x') = (x - \sum_{i=1}^{k} (x_i, x) x_i, x - \sum_{j=1}^{k} (x_j, x) x_j) =$
$(x, x) - (x, \sum_{j=1}^{k} (x_j, x) x_j) - (\sum_{i=1}^{k} (x_i, x) x_i, x) + (\sum_{i=1}^{k} (x_i, x) x_i, \sum_{j=1}^{k} (x_j, x) x_j) =$

$\| x \|^2 - \sum_{j=1}^{k}(x_j, x)(x, x_j) - \sum_{i=1}^{k}(x_i, x)^*(x_i, x) + \sum_{i=1}^{k}(x_i, x)^* \sum_{j=1}^{k}(x_j, x)(x_i, x_j) =$
$\| x \|^2 - \sum_{j=1}^{k} | (x_j, x) |^2 - \sum_{i=1}^{k} | (x_i, x) |^2 + \sum_{i=1}^{k}(x_i, x)^* \sum_{j=1}^{k}(x_j, x)\delta_{ij} = \| x \|^2 - \sum_{j=1}^{k} | (x_j, x) |^2$;
(*ii*) $(x', x_j) = (x - \sum_{i=1}^{k}(x_i, x)x_i, x_j) = (x, x_j) - \sum_{i=1}^{k}(x_i, x)^*(x_i, x_j) = (x, x_j) - \sum_{i=1}^{k}(x_i, x)^*\delta_{ij} = (x, x_j) - (x_j, x)^* = 0.$ ∎

Na osnovu prethodnog teorema lako se izvodi poznata nejednakost:

Teorem 1.6 *Za proizvoljne vektore x i y iz unitarnog (euklidskog) prostora U važi* Schwarz-ova nejednakost*:*

$$| (x, y) | \leq \| x \| \| y \|.$$

▬ *Dokaz:* Ako je $x = 0$, onda su obe strane jednake nuli i važi jednakost. Ako je $x \neq 0$, onda je $\{x/\| x \|\}$ ortonormiran skup, pa važi Bessel-ova nejednakost: $| (\frac{x}{\| x \|}, y) |^2 \leq \| y \|^2$. ∎

Schwarz-ova nejednakost ima značajne geometrijske, aritmetičke i analitičke posledice:

1. *Nejednakost trougla*,
$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|,$$
koja je nezaobilazna u svim daljim generalizacijama pojmova rastojanja i dužine. Ona se lako proverava: $\| x + y \|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + 2\mathrm{Re}(x, y)$; kako je $\mathrm{Re}(x, y) \leq | \mathrm{Re}(x, y) | \leq | (x, y) |$, sledi $\| x + y \|^2 \leq \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\| x \| \| y \| = (\| x \| + \| y \|)^2$. (Smenom $x \to x - z$ i $y \to z - y$ nejednakost trougla dobija sledeći oblik: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.)

2. U unitarnom prostoru $\mathbb{C}^n$, za bilo koja dva niza kompleksnih brojeva $(\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ i $(\eta_1, \ldots, \eta_n)^T$ važi *Cauchy-jeva nejednakost*:
$$| \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i |^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2.$$

3. U unitarnom prostoru polinoma P definisanim na intervalu $[a, b]$ važi sledeća relacija:
$$| \int_a^b x^*(t) y(t) \, \mathrm{d}t |^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \int_a^b |y(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Teorem 1.7 *Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ortonormirani skup vektora u prostoru sa skalarnim proizvodom. Sledeća tvrđenja su međusobno ekvivalentna:*

(*i*) *X je maksimalni ortonormirani skup, odnosno nije pravi podskup drugog ortonormiranog skupa.*

(*ii*) *X je kompletan, tj. iz $(x_i, x) = 0$ za $i = 1, \ldots, n$, sledi $x = 0$.*

(*iii*) *Skup X je obrazujući.*

(*iv*) *Za svaki vektor x prostora važi* Fourier-ov razvoj*: $x = \sum_{i=1}^{n}(x_i, x)x_i$.*

(*v*) *Za svaka dva vektora* x *i* y *važi* Parseval-ova jednakost*:*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i)(x_i, y).$$

(*vi*) *Za proizvoljni vektor* x *je ispunjena* Bessel-ova jednakost*:*

$$|| \ x \ ||^2 = \sum_{i=1}^{n} | \ (x_i, x) \ |^2.$$

▬ *Dokaz:* Biće pokazane implikacije $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (i)$, tj. prvo će biti pretpostavljeno da važi iskaz (i) i biće pokazano da iz njega sledi iskaz (ii), pa onda da važi iskaz (ii) a da iz njega sledi iskaz (iii), i tako redom, sve dok se konačno ne dokaže tačnost iskaza (i) kao posledica važenja iskaza (vi).

$(i) \Rightarrow (ii)$, odnosno $\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$: Ako je $(x_i, x) = 0$ za svako i i ako je $x \neq 0$, tada se može dodati vektor $x/|| \ x \ ||$ skupu X i tako dobiti ortonormirani skup veći od X, tj. X nije maksimalan skup u tom slučaju.

$(ii) \Rightarrow (iii)$, odnosno $\neg(iii) \Rightarrow \neg(ii)$: Ako postoji vektor x koji nije linearna kombinacija vektora x_i, tada na osnovu drugog dela teorema 1.5, vektor $x' = x - \sum_{i=1}^{n}(x_i, x)x_i$ je različit od nule i ortogonalan na svaki vektor iz skupa X.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Ako svaki vektor x iz U ima oblik $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, tada je $(x_i, x) = (x_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_i, x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i$.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Ako je $x = \sum_{i=1}^{n}(x_i, x)x_i$ i $y = \sum_{j=1}^{n}(x_j, y)x_j$, onda je
$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n}(x_i, x)x_i, \sum_{j=1}^{n}(x_j, y)x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}(x_i, x)^*(x_j, y)(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}(x_i, x)^*(x_j, y)\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(x_i, x)^*(x_i, y) = \sum_{i=1}^{n}(x, x_i)(x_i, y)$.

$(v) \Rightarrow (vi)$: U (v) staviti $x = y$.

$(vi) \Rightarrow (i)$: Ako bi se skup X sadržao u većem ortonormiranom skupu, na primer ako postoji vektor x_0 iz U ortogonalan na ceo skup X, tada iz $|| \ x_0 \ ||^2 = \sum_{i=1}^{n} | \ (x_i, x_0) \ |^2$ sledi $x_0 = 0$.

▮

Dakle, ovaj teorem daje šest osobina ortonormiranog skupa, od kojih je svaka ekvivalentna iskazu da je taj skup ortonormirani bazis prostora. Poseban značaj ima Fourier-ov razvoj, pokazujući da se koordinate vektora u ortonormiranom bazisu izražavaju preko skalarnog proizvoda: (x_i, x). Zbog toga se ovakve koordinate zovu *Fourier-ovi koeficijenti*, a Parseval-ova i Bessel-ova jednakost pokazuju da u ortonormiranom bazisu svaki skalarni proizvod izgleda kao standardni skalarni proizvod prostora $\mathbb{F}^n$. Vektor $(x_i, x)x_i$ se naziva *projekcija* vektora x na ort x_i.

Ako se u Parseval-ovoj jednakosti $(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x, x_i)(x_i, y)$, konjugovani Fourier-ov koeficijent (x, x_i) napiše preko njemu odgovarajuće Parseval-ove jednakosti, tj. kao $(x, x_i) = \sum_{j=1}^{n}(x, x_j)(x_j, x_i)$, i uvrsti u prethodnu formulu, dobija se $(x, y) = \sum_{i_1, i_2}(x, x_{i_2})(x_{i_2}, x_{i_1})(x_{i_1}, y)$. Daljom generalizacijom dobija se za $m \geq 1$:

$$(x, y) = \sum_{i_1, \ldots, i_m}^{n} (x, x_{i_m})(x_{i_m}, x_{i_{m-1}}) \cdots (x_{i_2}, x_{i_1})(x_{i_1}, y). \tag{1.1}$$

Već je rečeno da se u kvantnoj mehanici svako stanje opisuje vektorom iz prostora stanja sistema. Verovatnoća da sistem iz stanja y pređe u stanje x je $|\,(x,y)\,|^2$ (postulat o verovatnoćama), dok se sam skalarni proizvod (x,y) naziva *amplituda verovatnoće* prelaza. U skladu s tim, formula (1.1) pokazuje da je amplituda verovatnoće za prelazak iz stanja y u stanje x suma u kojoj je svaki sabirak proizvod amplituda verovatnoća za niz prelaza $y \mapsto x_{i_1} \mapsto \cdots \mapsto x_{i_m} \mapsto x$. Interpretirajući ovaj sabirak kao amplitudu verovatnoće trajektorije iz y u x u prostoru stanja, koja prolazi kroz međupoložaje $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$, Feynman je izrazom (1.1) definisao zakon slaganja kompleksnih amplituda verovatnoća: amplituda prelaza iz y u x je suma amplitudâ verovatnoća prelaza iz y u x po svim mogućim trajektorijama između y i x. U beskonačnodimenzionalnoj varijanti ona je osnova za semiheurističku tehniku izražavanja amplitude verovatnoće preko Feynman-ovih integrala po trajektorijama (engl. path integrals). Prostor trajektorija je beskonačnodimenzionalan i matematičari do sada nisu formirali opštu teoriju koja bi sasvim opravdala široku primenu Feynman-ovih dijagrama u različitim oblastima fizike.

1.3.4 Gram-Schmidt-ov postupak ortonormalizacije

Zbog konceptualnog i praktičnog značaja, ortonormirani bazisi se koriste kad god je to moguće. Stoga je razrađen metod formiranja ortonormiranog bazisa na osnovu zadatog proizvoljnog bazisa, koji po svojim autorima nosi naziv *Gram-Schmidt-ov postupak ortonormalizacije*. Njime se omogućava da se u prostorima sa skalarnim proizvodom radi isključivo u ortonormiranim bazisima, te predstavlja jedno od najvažnijih mesta u teoriji vektorskih prostora, čemu doprinosi i značaj koji ima za aplikacije u fizici.

Neka je $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ proizvoljan bazis. Suština metoda je da se ortonormirani bazis $Y = \{y_1,\dots,y_n\}$ konstruiše tako da je svaki y_i linearna kombinacija prvih i vektora, $x_1,\dots,x_i$, iz X.

Vektor x_1 je sigurno nenulti, jer je X linearno nezavisan skup, pa je $y_1 = \frac{x_1}{\|\, x_1 \,\|}$ dobro definisan normirani vektor, koji je očigledno linearna kombinacija (tj. umnožak) prvog vektora, x_1, iz X. Neka je nađeno k vektora $y_1,\dots,y_k$ koji formiraju ortonormirani skup i neka je svaki vektor y_i $(i=1,\dots,k)$ linearna kombinacija vektora $x_1,\dots,x_i$. Neka je dalje

$$z = x_{k+1} - (\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k),$$

gde vrednosti skalara $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ tek treba odrediti. Pošto je

$$(y_i, z) = (y_i, x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j y_j) = (y_i, x_{k+1}) - \alpha_i, \quad (i = 1,\dots,k)$$

sledi da je $(y_i,z) = 0$ ako se izabere $\alpha_i = (y_i, x_{k+1})$ za $i = 1,\dots,k$. Pored toga, z je linearna kombinacija vektora x_{k+1} i vektora $y_1,\dots,y_k$, pa je i linearna kombinacija vektora x_{k+1} i $x_1,\dots,x_k$. Konačno, z sigurno nije nulti vektor, jer su vektori $x_1,\dots,x_k,x_{k+1}$ linearno nezavisni, a koeficijent uz x_{k+1} u izrazu za z je različit od nule. Preostaje da se z normira, čime se dobija $y_{k+1} = z/\|\, z \,\|$. Skup $\{y_1,\dots,y_k,y_{k+1}\}$ je opet ortonormirani skup, sa svim traženim osobinama, što pokazuje da je ova induktivna šema dobro definisana.

Primeri ortonormiranih bazisa

1. U prostoru $\mathbb{C}^{22}$, skup $\{\frac{1}{\sqrt{2}}I_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_y, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_z\}$, gde je I_2 jedinična matrica, dok su $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}$ i $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli-jeve matrice, obrazuju ortonormiran bazis u odnosu na standardni skalarni proizvod: $(A, B) = \operatorname{Tr} A^\dagger B$.

2. U prostoru polinoma P_3 definisanih na intervalu $(-1, 1)$, u odnosu na skalarni proizvod $(x(t), y(t)) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$, Gram-Schmidt-ovim postupkom ortonormalizacije bazisa $\{1, t, t^2\}$ dobija se ortonormirani bazis $\{\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2}t, \sqrt{5/8}(3t^2 - 1)\}$, čiji elementi su normirani Legendre-ovi polinomi.

1.4 POTPROSTORI

Pored tačaka u prostoru, geometrijiski objekti kao što su prave, ravni i slično se takođe često razmatraju. Ovde će biti proučeni analogni objekti u apstraktnim vektorskim prostorima.

1.4.1 Definicija i primeri

Definicija 1.9 *Neprazan podskup W vektorskog prostora $V(\mathbb{F})$ je* potprostor *ako zajedno sa svakim parom vektora x i y koje sadrži, sadrži i svaku njihovu linearnu kombinaciju $\alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Ovo se označava sa $W < V$.*

Dakle, potprostor vektorskog prostora V je i sâm vektorski prostor, i to sa sabiranjem vektora i množenjem vektora skalarom definisanim na isti način kao u prostoru $V(\mathbb{F})$ (definicija 1.1). Očigledno je iz definicije da je dimenzija potprostora manja ili jednaka od dimenzije prostora.

Potprostor sadrži nulti vektor, jer ako sadrži vektor x, onda sadrži i vektor $x - x$ kao jednu od linearnih kombinacija. Stoga, kada se potprostor interpretira kao generalizacija pravih i ravni, imaju se u vidu samo ravni i prave koje prolaze kroz koordinatni početak.

Svaki vektorski prostor V ima dva posebna, tzv. *trivijalna* potprostora:

1. skup $\{0\}$ koji sadrži samo nulti element;

2. celi prostor V.

Opšti metod formiranja potprostora nekog vektorskog prostora V se sastoji u sledećem: uoči se neki proizvoljan skup S vektora iz V i formira skup svih linearnih kombinacija vektora iz S, odnosno *lineal* nad S, $L(S)$. Tako formiran skup $L(S)$ je potprostor i to najmanji potprostor koji sadrži skup S.

Koristeći opisanu konstrukciju, lako se proverava da prostor dimenzije n, pored trivijalnih, ima i potprostore svih dimenzija manjih od n.

Teorem 1.8 *Dimenzija potprostora $L(S)$ koji obrazuju linearno nezavisni vektori $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ je k, a skup S je jedan bazis u $L(S)$.*

▬ *Dokaz:* Skup S je linearno nezavisan i obrazujući za $L(S)$, pa je prema tome, bazis. Bazis S ima k elemenata pa je $\dim L(S) = k$. ▮

Ako je $\{w_1, \ldots, w_k\}$ bazis u potprostoru $W_k(\mathbb{F})$ prostora $V_n(\mathbb{F})$, tada je moguće ovaj bazis dopuniti do bazisa prostora V_n: $\{w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_{n-k}\}$. Za ovakav bazis se kaže da je *adaptiran na potprostor* W. Svaki vektor koji pripada potprostoru W_k reprezentuje se u adaptiranom bazisu kolonom iz $\mathbb{F}^n$ koja ima prvih k elemenata, u principu, nenultih, dok su poslednjih $n-k$ elemenata obavezno nule. Svaka kolona koja ima nenultu komponentu među poslednjih $n-k$ reprezentuje vektor koji ne pripada potprostoru W_k.

Primeri

1. Neka su m i n dva prirodna broja, pri čemu je $m \leq n$. Skup svih vektora $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ iz $\mathbb{C}^n$ za koje važi $\xi_1 = \ldots = \xi_m = 0$ je potprostor.

   Takođe u $\mathbb{C}^n$, skup svih vektora koji zadovoljavaju uslov $\sum_{i=1}^n \xi_i = 0$ je potprostor.

2. U prostoru $\mathbb{C}^{nn}$, kvadratnih matrica tipa $n \times n$ sa kompleksnim elementima, skup svih *simetričnih matrica* $A^T = A$, je potprostor.

3. U $\mathbb{C}^{nn}$ jedan potprostor je skup svih *antisimetričnih matrica* $A^T = -A$; isto važi i za skup svih matrica koje komutiraju sa nekom zadatom matricom.

4. U prostoru polinoma $P_n(\mathbb{R})$, skup svih polinoma x za koje važi $x(t_1) = \ldots = x(t_m) = 0$, gde su m i n prirodni brojevi i $m \leq n$ a $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$, je potprostor.

5. U prostoru polinoma $P(\mathbb{F})$ skup svih vektora (polinoma) x za koje je ispunjeno $x(t) = x(-t)$ je potprostor. U istom prostoru je $P_n(\mathbb{F})$ potprostor.

1.4.2 Operacije sa potprostorima

Potprostori su podskupovi vektorskog prostora, odabrani tako da sačuvaju strukturu celog prostora. To znači da uobičajene operacije sa podskupovima, presek, unija i komplement, primenjene na potprostore, daju nove podskupove vektorskog prostora, ali ovi ne moraju biti potprostori, jer pomenute skupovne operacije nisu u opštem slučaju usklađene sa operacijama koje postoje u vektorskom prostoru (tj. ne moraju biti zatvoreni za linearne kombinacije). Ipak, kao što će biti pokazano u ovom odeljku, uz sasvim prirodne zahteve, mogu se definisati analogne operacije sa traženim svojstvima.

Operacija preseka je već usklađena sa strukturom vektorskog prostora, što pokazuje

Teorem 1.9 *Presek proizvoljnog broja potprostora je potprostor.*

▬ *Dokaz:* Treba pokazati da je $W = \cap_i W_i$ potprostor ako su svi W_i potprostori. Pošto svaki W_i sadrži nulti vektor onda ga sadrži i W. Ako x i y pripadaju W (tj. svim potprostorima W_i) onda i $\alpha x + \beta y$ pripada svim potprostorima W_i pa pripada i prostoru W. ▮

Koristeći ovu činjenicu, može se reći i da je lineal nad skupom S, kao najmanji potprostor koji sadrži S, upravo presek svih potprostora koji sadrže S.

Nasuprot preseku, operacija unije nije zadovoljavajuća u smislu održavanja strukture. Primer ravni, u kojoj su dve koordinatne ose potprostori, ali to nije i njihova unija, dakle koordinatni sistem, pokazuje da u opštem slučaju unija dva potprostora nije potprostor. Stoga se umesto unije razmatra najmanji potprostor koji nju sadrži.

Definicija 1.10 Suma *ili* zbir *potprostora* W_1 *i* W_2 *(u prostoru* V*) je prostor* $W_1 + W_2 \stackrel{\text{def}}{=} L(W_1 \cup W_2)$*, tj. lineal nad njihovom unijom. Suma se naziva* direktna*, i označava se* $W_1 \oplus W_2$*, ako je* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$*. Kaže se da potprostori* W_1 *i* W_2 *čine* dekompoziciju *ili* razlaganje prostora V*, ako je* $V = W_1 \oplus W_2$*.*

Svaki vektor iz prostora $W_1 + W_2$ je oblika $x_1 + x_2$, gde je $x_1 \in W_1$ a $x_2 \in W_2$. U slučaju direktnog zbira, ovo razlaganje je jedinstveno, tj. komponente x_1 i x_2 su potpuno određene. Lako je proveriti da je suma potprostora asocijativna operacija na skupu potprostora, te se svi navedeni pojmovi (sume, direktne sume i dekompozicije) mogu uopštiti na slučaj više potprostora.

U ovom kontekstu se uvodi i srodan pojam sabiranja celih prostora, po analogiji sa konstrukcijom ravni pomoću njene dve koordinatne ose.

Definicija 1.11 *Neka su* V_1 *i* V_2 *vektorski prostori (nad istim poljem). Njihova* (spoljašnja) direktna suma *je vektorski prostor* $V_1 \oplus V_2$*, čiji su elementi uređeni parovi* $[x, y]$*, gde je* $x \in V_1$ *i* $y \in V_2$*, a linearna kombinacija je definisana na sledeći način:*

$$\alpha[x, y] + \beta[x', y'] = [\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y'].$$

Skupovi svih vektora oblika $[x, 0]$, odnosno $[0, y]$, čine potprostore $\tilde{V}_1$, odnosno $\tilde{V}_2$, u $V_1 \oplus V_2$. Ovi potprostori su očigledno izomorfni prostorima V_1 i V_2, respektivno (prirodni izomorfizmi su $[x, 0] \leftrightarrow x$ i $[0, y] \leftrightarrow y$). U tom smislu je pogodno, uz izvesnu nepreciznost, govoriti o prostoru V_1 kao o potprostoru prostora $V_1 \oplus V_2$, i slično za V_2. S druge strane je jasno da je $V_1 \oplus V_2 = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$, gde je na levoj strani jednakosti iskorišćena definicija 1.11, a na desnoj definicija 1.10. Postaje vidljivo da zapravo nema bitne razlike u pojmovima unutrašnje i spoljašnje direktne sume, ako se zna da je svaki potprostor i sam vektorski prostor.

Dimenzija sume potprostora je u punoj analogiji sa brojem elemenata unije dva podskupa.

Teorem 1.10 *Za proizvoljna dva potprostora* W_1 *i* W_2 *vektorskog prostora* V *važi relacija:*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

▬ *Dokaz:* Neka je $\dim W_1 = n_1$, $\dim W_2 = n_2$ i $\dim(W_1 \cap W_2) = m$. Neka je dalje, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ bazis potprostora $W_1 \cap W_2$. Taj bazis se može dopuniti do bazisa potprostora $W_1 > W_1 \cap W_2$: $\{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_{n_1-m}\}$. Analogno se može formirati i bazis u W_2: $\{e_1, \ldots, e_m, g_1, \ldots, g_{n_2-m}\}$. Treba pokazati da $n_1 + n_2 - m$ vektora iz skupa $B = \{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_{n_1-m}, g_1, \ldots, g_{n_2-m}\}$ čini bazis prostora $W_1 + W_2$.
Prvo će biti pokazana linearna nezavisnost vektora iz B. Neka je $e = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m \in W_1 \cap W_2$, $f = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_{n_1-m} f_{n_1-m} \in W_1$ i $g = \gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_{n_2-m} g_{n_2-m} \in W_2$. Neka je dalje $e + f + g = 0$. Odatle sledi da je $g = -(e + f) \in W_1$, tj. $g \in W_1 \cap W_2$, što znači da se vektor g može izraziti kao linearna kombinacija vektora $\{e_1, \ldots, e_m\}$, odnosno koeficijenti γ_i, $(i = 1, \ldots, n_2 - m)$ su jednaki nuli, zbog jedinstvenosti razvoja vektora po bazisu. Znači, $g = 0$. Tada je i $e + f = 0$, odnosno $f = -e \in W_1 \cap W_2$, se može izraziti kao linearna kombinacija vektora $\{e_1, \ldots, e_m\}$, pa je $\beta_i = 0$

$(i = 1, \ldots, n_2 - m)$. Znači $f = 0$, odnosno $e = 0$. Pošto je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ bazis, sledi da su i svi koeficijenti α_i $(i = 1, \ldots, m)$ jednaki nuli. Dakle, skup B je linearno nezavisan.
Skup B je i obrazujući, jer proizvoljni vektor iz $W_1 + W_2$ ima oblik $x + y$, gde je $x \in W_1$ a $y \in W_2$, a razvijanjem vektora x po bazisu $\{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_{n_1-m}\}$, i vektora y po bazisu $\{e_1, \ldots, e_m, g_1, \ldots, g_{n_2-m}\}$, očigledno se dobija razvoj vektora $x + y$ po vektorima iz skupa B. Linearno nezavisan i obrazujući za $W_1 + W_2$, B je bazis u $W_1 + W_2$. ∎

Direktna posledica upravo dokazanog teorema je da se prostor V razlaže na direktnu sumu svojih potprostora W_1 i W_2, čiji je presek $\{0\}$, ako i samo ako je zbir njihovih dimenzija jednak dimenziji prostora: $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.

U slučaju kada se potprostor razlaže na direktnu sumu svojih potprostora, moguće je obrazovati bazis prilagođen ili *adaptiran na dekompoziciju*: Naime, ako je $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, i ako su $\{w_1^1, \ldots, w_{n_1}^1\}$, …, $\{w_1^k, \ldots, w_{n_k}^k\}$, bazisi potprostorâ $W_1, \ldots, W_k$, respektivno, tada je $\{w_1^1, \ldots, w_{n_1}^1, \ldots, w_1^k, \ldots, w_{n_k}^k\}$ bazis u prostoru V adaptiran na datu dekompoziciju. Očigledne su konceptualne i praktične prednosti koje adaptirani bazis pruža.

Konačno, komplement potprostora nikad nije potprostor, jer sigurno ne sadrži nulti vektor. Stoga se i ova operacija prilagođava strukturi vektorskog prostora.

Definicija 1.12 Direktni komplement *potprostora W vektorskog prostora V je svaki potprostor W^C u V za koji važi da je $V = W \oplus W^C$.*

Smisao gornje definicije je da se kao i za običan komplement, traži među potprostorima onaj koji osim nultog vektora (koji svaki potprostor mora sadržati), nema preseka sa W, a operacija sabiranja (nastala od unije) sa početnim potprostorom daje celi prostor. No, treba uočiti da je direktni komplement nejednoznačan: osim u slučaju kada je W neki od trivijalnih potprostora, različiti potprostori se mogu uzeti za W^C. Na primer, ako je u prostoru $\mathbb{R}^3$ za potprostor W uzeta xy-ravan, tada je svaka prava koja ne leži u ravni, a prolazi kroz koordinatni početak, jedan direktni komplement za W. Ipak, teorem 1.10 garantuje da su dimenzije svih direktnih komplemenata iste i jednake $\dim V - \dim W$.

1.4.3 Projekcioni teorem

Uvedeni pojmovi i operacije će u nastavku biti razmotreni u slučaju kada je V prostor sa skalarnim proizvodom.

Neka je W proizvoljan podskup prostora V. *Ortogonalni komplement* skupa W, označen sa $W^\perp$, je skup svih vektora iz V koji su ortogonalni na svaki vektor iz W. Lako je proveriti da je $W^\perp$ potprostor u V (bez obzira da li je W potprostor) i da $W^{\perp\perp}$ sadrži lineal $L(W)$, pa time i sam skup W. U konačnodimenzionalnom slučaju je $W^{\perp\perp} = L(W)$.

Dva potprostora W_1 i W_2 unitarnog prostora U su ortogonalna ako je $(x, y) = 0$ za svako x iz W_1 i za svako y iz W_2, odnosno kada se svaki od potprostora sadrži u ortogonalnom komplementu drugog potprostora. To se piše kao $W_1 \perp W_2$. Očigledno je da je $W_1 \perp W_2$ ako i samo ako su svi vektori jednog bazisa prostora W_1 ortogonalni na sve vektore nekog bazisa u W_2. Treba zapaziti da su vektori iz preseka dva ortogonalna potprostora ortogonalni na sebe, te se presek sastoji samo od nultog vektora, što opravdava narednu definiciju.

Definicija 1.13 *Suma potprostora W_1 i W_2 unitarnog prostora U se naziva* ortogonalna suma*, i označava sa $W_1 \oplus W_2$, ako su W_1 i W_2 ortogonalni potprostori: $W_1 \perp W_2$. Kaže se da su prostori*

W_1 i W_2 ortogonalna dekompozicija *ili* ortogonalno razlaganje *prostora U, ako je U njihova ortogonalna suma.*

Treba uočiti da je svaka ortogonalna dekompozicija istovremeno i direktna. Kao i ranije, ovi pojmovi se lako uopštavaju na slučaj više međusobno ortogonalnih potprostora: U je ortogonalna suma svojih potprostora $W_1, \ldots, W_n$, što se označava sa $U = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$, ako je $U = W_1 + \cdots + W_n$, a za svako $i \neq j$ važi $W_i \perp W_j$.

Potprostor i njegov ortogonalni komplement čine ortogonalnu dekompoziciju prostora, te je pri zadatom potprostoru W, jedini potprostor koji sa W čini ortogonalnu dekompoziciju upravo $W^\perp$. To je posledica tzv. *projekcionog teorema*:

Teorem 1.11 *Ako je W proizvoljan potprostor konačnodimenzionalanog unitarnog (euklidskog) prostora U, tada je U ortogonalna suma potprostora W i $W^\perp$; pri tome je $W^{\perp\perp} = W$.*

▬ *Dokaz:* Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ortonormiran bazis u W, i neka je z proizvoljan vektor iz U. Neka je dalje, $x = \sum_{i=1}^m (x_i, z)x_i$, gde su (x_i, z) Fourier-ovi koeficijenti vektora z u odnosu na skup X, a $(x_i, z)x_i$ su projekcije vektora z na ortove iz bazisa X. Dakle, x je projekcija vektora z na potprostor W. Na osnovu teorema 1.5, vektor $y = z - x$ je ortogonalan na ceo bazis X, tj. na ceo potprostor W, što znači da pripada potprostoru $W^\perp$. Prema tome, z je suma dva vektora: x i y, pri čemu je prvi iz W, a drugi iz $W^\perp$. Da potprostori W i $W^\perp$ imaju trivijalan presek, očigledno je: kada bi npr. vektor x pripadao i jednom i drugom prostoru bilo bi $(x, x) = \| x \|^2 = 0$. Dakle, $V = W \oplus W^\perp$.
Iz $(x, z) = (x, x + y) = \| x \|^2 + (x, y) = \| x \|^2$ i $(y, z) = (y, x + y) = (y, x) + \| y \|^2 = \| y \|^2$, sledi da ako je z iz $W^{\perp\perp}$, da je tada $z = x$, tj. da se $W^{\perp\perp}$ sadrži u W. Pošto se je već poznato da se W sadrži u $W^{\perp\perp}$, sledi $W = W^{\perp\perp}$. ▮

Već u dokazu teorema je iskorišćen njegov geometrijski smisao, kome duguje i naziv. Naime, za svaki vektor $z \in U$ su jednoznačno definisane međusobno ortogonalne komponente $x \in W$ i $y \in W^\perp$. U skladu sa uobičajenim pojmovima projekcije, vektor x je *projekcija vektora z na potprostor W*, a vektor y je *normala vektora z na potprostor W*. Dobro poznat Pitagorin teorem je jedna od direktnih posledica projekcionog teorema: pošto je $(z, x) = \| x \|^2$ i $(z, y) = \| y \|^2$, važi:

$$\| z \|^2 = (z, z) = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

Lako se proverava, koristeći Pitagorin teorem, da je normala y vektora z na potprostor W najkraće rastojanje vektora z od potprostora W. To znači da je projekcija vektora na potprostor upravo onaj vektor potprostora koji je najbliži zadatom vektoru, tj. projekcija je najbolja aproksimacija datog vektora nekim vektorom iz posmatranog potprostora.

Generalizacija projekcionog teorema na više potprostora se lako nalazi: neka su $W_1, \ldots, W_k$ međusobno ortogonalni potprostori u unitarnom (euklidskom) prostoru U i neka je $U = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. Svaki vektor x na jedinstven način određuje međusobno ortogonalne komponente x_i iz potprostora W_i, tako da je $x = x_1 + \ldots + x_k$, $x_i \in W_i$. Pri tome važi $\| x \|^2 = \| x_1 \|^2 + \ldots + \| x_k \|^2$.

Pomoću uvedenih pojmova, može se koncizno formulisati Gram-Schmidt-ov postupak ortonormalizacije: Neka je dat bazis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ u unitarnom (euklidskom) prostoru U. Da bi se dobio ortonormiran bazis $\{y_1, \ldots, y_n\}$ u U takav da je $y_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j x_j$, $(i = 1, \ldots, n)$ postupak je sledeći: y_1 se dobija normiranjem vektora x_1, a svaki sledeći y_i, $(i = 2, \ldots, n)$ kao normirana normala vektora x_i na $L(y_1, \ldots, y_{i-1})$.

Glava 2

LINEARNI OPERATORI

Sa stanovišta fizike, preslikavanja među vektorskim prostorima, pre svega unutar jednog prostora, imaju isti značaj kao i sami prostori. Moglo bi se reći da je ova grana matematike i prodrla u fiziku da bi se omogućilo što potpunije sagledavanje ovih preslikavanja, tzv. operatora. Dovoljno je shvatiti da se svako kretanje, evolucija, opisuje kao preslikavanje u prostoru stanja, pa kad god je skup mogućih stanja fizičkog sistema vektorski prostor, tada je i dinamika sistema opisana operatorom u tom prostoru.

2.1 ALGEBRA OPERATORA

U ovom poglavlju će biti uvedeni linearni operatori, a zatim proučena njihova osnovna svojstva, kao i operacije sa njima.

2.1.1 Definicija i primeri

Definicija 2.1 *Preslikavanje A, definisano na celom vektorskom prostoru $U(\mathbb{F})$ sa likovima u vektorskom prostoru $V(\mathbb{F})$, nad istim poljem $\mathbb{F}$, naziva se* linearni operator (linearna transformacija)*, ako za svako x, y iz U i za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, važi $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. Kada je $U = V$, A je linearni operator na datom vektorskom prostoru. Skup svih operatora iz U u V se obeležava sa $\hat{L}(U, V)$.*

Na ovaj način je linearni operator definisan kao preslikavanje koje održava linearne kombinacije, u smislu da linearnu kombinaciju originala preslikava u linearnu kombinaciju likova sa istim koeficijentima. Kako linearna kombinacija obuhvata sve operacije u vektorskom prostoru, linearni operator je preslikavanje koje održava strukturu vektorskih prostora, tj. to je njihov homomorfizam. Tako je i izomorfizam, uveden u odeljku 1.2.3, jedan specijalan slučaj linearnog operatora. Iz definicije neposredno sledi $A0 = 0$ (ovo je još jedna manifestacija homomorfnosti preslikavanja, jer nulti vektor ima posebnu ulogu u strukturi samog prostora, te se morao preslikati u nulti vektor drugog prostora) i zato se ove transformacije nekad nazivaju i *homogene* linearne transformacije.

Održavanje koeficijenata u kombinaciji je i dovelo do zahteva da prostor u koji se vrši preslikavanje bude nad istim poljem kao i prostor originala; jasno, bilo je neophodno da prostor V

bude nad poljem koje sadrži polje prostora U, te se ponekad daje i takva definicija, no za potrebe fizike ovakvo uopštenje nije neophodno.

Posledica linearnosti je da je svaki operator $A : U \to V$ potpuno određen delovanjem na bazisne vektore u U. Ako je poznato kako operator A deluje na bazis $\{u_1, \ldots, u_n\}$, tj. ako je poznat skup $\{Au_1, \ldots, Au_n\}$, onda je dejstvo operatora A na proizvoljan vektor x iz U određeno linearnošću: $Ax = A\sum_{i=1}^n \xi_i u_i = \sum_{i=1}^n \xi_i(Au_i)$.

Kao i za druga preslikavanja, kaže se da su dva operatora $A : U \to V$ i $B : U \to V$ jednaka, še označava sa $A = B$, ako je $Ax = Bx$, za svako x iz U. Na osnovu prethodne napomene, sledi da su dva operatora jednaka ako na isti način deluju na vektore proizvoljnog bazisa.

Primeri

1. Na svakom prostoru se definiše *jedinični* operator, I, kao identično preslikavanje, tj. operator koji svakom vektoru pridružuje isti taj vektor: $Ix = x, \forall x \in V$. Drugi trivijalan primer je *nulti* operator, 0, koji svakom vektoru iz U dodeljuje nulti vektor iz V: $0x = 0$.

2. U trodimenzionalnom euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$, rotacije oko proizvoljne ose koja prolazi kroz koordinatni početak su linearne transformacije. Rotacija $R(\varphi)$ oko date ose svaki vektor x iz $\mathbb{R}^3$ prevodi u neki drugi vektor $R(\varphi)x$ takođe iz $\mathbb{R}^3$. Pri tome je rezultat isti ako se dva vektora prvo saberu pa onda rotiraju ili ako se prvo rotiraju pa onda saberu. Kako rotacija ne menja normu vektora, rezultat je isti i ako se vektor prvo pomnoži skalarom pa onda rotira ili ako se prvo rotira pa onda pomnoži istim skalarom.

3. Neka je $\mathbb{R}^2$ proizvoljna ravan koja sadrži koordinatni početak i pripada prostoru $\mathbb{R}^3$. Neka operator P pridružuje svakom vektoru x iz $\mathbb{R}^3$ njegovu projekciju Px na uočenu ravan $\mathbb{R}^2$. Lako se proverava da je P linearni operator na $\mathbb{R}^3$.

4. Svaka matrica $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ iz $\mathbb{F}^{mn}$ preslikava kolonu $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ iz $\mathbb{F}^n$ u kolonu $\mathcal{A}x = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$, gde je $\eta_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k$ prostora $\mathbb{F}^m$. Lako je videti da je ovo linearni operator, tj. $\mathcal{A} \in \hat{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. Istovremeno, svaki linearni operator A iz $\hat{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, svojim delovanjem na i-ti vektor e_i apsolutnog bazisa u $\mathbb{F}^n$ daje kolonu Ae_i iz $\mathbb{F}^m$. Time se operatoru A pridružuje matrica $\mathcal{A}$ sa elementima $a_{ji} = (Ae_i)_j$, koja apsolutni bazis preslikava na isti način kao i A, pa su A i $\mathcal{A}$ isti linearni operator. To znači da je $\mathbb{F}^{mn} = \hat{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$.

5. U prostoru $P_n(\mathbb{R})$ operator *izvoda* ili operator *diferenciranja*, D, je linearni operator: $Dx(t) = x'(t)$.

6. U prostoru $P(\mathbb{R})$ *multiplikativni* operator, T, definisan relacijom $Tx(t) = tx(t)$, za svaki polinom $x(t) \in P(\mathbb{R})$, je linearan, kao i operator S definisan relacijom $Sx(t) = \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $x(t) \in P(\mathbb{R})$.

2.1.2 Vektorski prostor $\hat{L}(U, V)$

U skupu svih preslikavanja prostora U u prostor V mogu se uvesti sve operacije koje su uvedene u prostoru V, tako što se operacije među preslikavanjima definišu kao odgovarajuće operacije sa likovima preslikavanja[1]. Ograničavajući se na linearne operatore, operacije iz V, sabiranje vektora i množenje vektora skalarom indukuju sabiranje operatora i množenje operatora skalarom. Za operatore A i B njihova *suma* ili *zbir*, $A+B$, zadat je relacijom: $(A+B)x \stackrel{\text{def}}{=} Ax+Bx$, za svako x iz U. Slično se uvodi i množenje operatora skalarom: za svaki operator A iz $\hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ i za svaki skalar $\alpha \in \mathbb{F}$, proizvod αA je definisan sa: $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$, za svako x iz U. Time se uvodi struktura u skup linearnih preslikavanja iz U u V.

Teorem 2.1 (i) *Skup linearnih operatora $\hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.*

(ii) *Ako su $U_n(\mathbb{F})$ i $V_m(\mathbb{F})$ konačnodimenzionalni prostori, $\hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ je izomorfan prostoru $\mathbb{F}^{mn}$ i dimenzija mu je $\dim \hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F})) = \dim U \dim V$.*

(iii) *Za svaki izbor bazisa $\{u_1, \dots, u_n\}$ u U i $\{v_1, \dots, v_m\}$ u V, preslikavanje $F(A) = \mathcal{A}$, gde je $A \in \hat{L}(U, V)$, a $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrica iz $\mathbb{F}^{mn}$ definisana izrazom*

$$Au_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

je jedan izomorfizam prostora $\hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ na prostor $\mathbb{F}^{mn}$.

▬ *Dokaz:* (i) Jasno je da je linearna kombinacija operatora iz U u V opet jedno preslikavanje iz U u V. Ostalo je da se pokaže linearnost preslikavanja: $(\alpha A + \beta B)(\xi x + \eta y) = \alpha\xi Ax + \alpha\eta Ay + \beta\xi Bx + \beta\eta By = \xi(\alpha A + \beta B)x + \eta(\alpha A + \beta B)y$.
(ii) Ovo je posledica narednog iskaza.
(iii) Izborom bazisa u U i V su, prema teoremu 1.3, uspostavljeni izomorfizmi $f_U : U \to \mathbb{F}^n$ i $f_V : V \to \mathbb{F}^m$, koji zadate bazise preslikavaju u apsolutne bazise, $\{e_1, \dots, e_n\}$ i $\{e'_1, \dots, e'_m\}$, respektivno. Samim tim, za svaki linearni operator $A \in \hat{L}(U(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ definisan je linearni operator $F(A) \in \hat{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ izrazom $F(A) = f_V A f_U^{-1}$. Ako je $Au_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j$, sledi da je $F(A)e_i = f_V A u_i = f_V(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j$, tj. $F(A)$ je, u smislu primera 4, matrica sa koeficijentima a_{ij}. Jasno je da je A potpuno određen matricom $F(A)$ i obratno, te je F bijekcija. Izraz 2.1 pokazuje da se linearna kombinacija operatora preslikava u istu takvu linearnu kombinaciju matrica pojedinih operatora, pa je F linearno preslikavanje. Stoga je F izomorfizam $\hat{L}(U, V)$ na $\mathbb{F}^{mn}$. ∎

Kao što je ranije pokazano, apsolutni bazis u prostoru $\mathbb{F}^{mn}$ čine Weyl-ove matrice, E_{ij} (primer 4). Stoga jedan bazis prostora $\hat{L}(U, V)$ čine operatori A_{ij}, za koje važi $F(A_{ij}) = E_{ij}$. Koristeći inverzne izomorfizme, jasno je da je $A_{ij} = f_V^{-1} E_{ij} f_U$, te je $A_{ij} u_l = \delta_{jl} v_i$. Ovi operatori čine bazis u prostoru $\hat{L}(U, V)$, i svaki operator A se može izraziti kao njihova linearna kombinacija, pri čemu su koeficijenti kombanicije upravo elementi matrice $F(A)$.

[1] Ovo je zapravo opšti stav: ako su f i g preslikavanja definisana na skupu X sa likovima u skupu Y, tada se za svaku operaciju $\circ$ na Y može indukovati operacija među preslikavanjima izrazom $(f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \circ g(x)$.

2.1.3 Algebra $\hat{L}(V,V)$

Ukoliko je $B \in \hat{L}(U,V)$, a $A \in \hat{L}(V,W)$, definisana je kompozicija, $A \circ B$, preslikavanja A i B. Kako i A i B preslikavaju linearnu kombinaciju originala u linearnu kombinaciju likova sa istim koeficijentima, istu osobinu ima i kompozicija, te je to operator iz prostora $\hat{L}(U,W)$. Specijalno, za svaka dva operatora na prostoru V se može formirati takva kompozicija, i ona se naziva *množenje* ili *proizvod* operatora: $(AB)x \stackrel{\text{def}}{=} A(Bx)$.

Kao i kod svake kompozicije preslikavanja, simbol proizvoda operatora treba čitati s desna na levo, da bi se dobio postupak transformacije vektora, tj. redosled njihove uzastopne primene. Ovo je značajno zapaziti, jer u opštem slučaju, kompozicija linearnih transformacija na vektorskom prostoru nije komutativna. Dobro poznat primer nekomutativnosti u prostoru polinoma $P(\mathbb{R})$ se odnosi na operator izvoda D i multiplikativni operator T. Operator izvoda je definisan sa $Dx(t) = x'(t)$, a multiplikativni operator sa $Tx(t) = tx(t)$. Dakle, $DTx(t) = D(Tx(t)) = D(tx(t)) = x(t) + tx'(t)$, dok je $TDx(t) = T(Dx(t)) = Tx'(t) = tx'(t)$. Drugim rečima, ne samo da je netačno $DT = TD$ (tako da $DT - TD = 0$), nego je, u stvari $(DT - TD)x(t) = x(t)$, za svako $x(t) \in P$, tako da je $DT - TD = I$ jedinični operator. Lako se mogu naći i drugi primeri nekomutativnosti operatora. Među geometrijskim linearnim transformacijama u $\mathbb{R}^3$ očigledan primer su rotacije oko različitih osa koje prolaze kroz koordinatni početak.

Dakle, na vektorskom prostoru svih linearnih operatora koji preslikavaju V u V može se definisati još jedna zatvorena binarna operacija: množenje operatora. Kao i svaka kompozicija preslikavanja, ova operacija je asocijativna. Pri tome, identični operator koji ostavlja nepromenjenim svaki vektor iz V pripada skupu linearnih operatora. Dobijena algebarska struktura se naziva *asocijativna algebra sa jedinicom.*

Definicija 2.2 Algebra *nad poljem $\mathbb{F}$, $A(\mathbb{F})$, je vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{F}$, u kome je definisana dodatna binarna operacija množenja vektora, $\circ : A \times A \to A$, koja je* bilinearna*, tj. za proizvoljne vektore $x, y, z \in A$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ važi $(\alpha x + \beta y) \circ z = \alpha(x \circ z) + \beta(y \circ z)$ i $z \circ (\alpha x + \beta y) = \alpha(z \circ x) + \beta(z \circ y)$. Ukoliko je operacija $\circ$ asocijativna, kaže se da je A* asocijativna algebra*. Kaže se da je A* algebra sa jedinicom*, ukoliko u A postoji* jedinični element*, i, takav da je $ia = ai = a$, za svako $a \in A$.*

Iz prethodnog je jasno da je svaki prostor linearnih operatora $\hat{L}(V,V)$ jedna asocijativna algebra sa jedinicom. Najpoznatiji primer takve algebre je skup kvadratnih matrica $\mathbb{F}^{nn}$. Ovaj skup obrazuje algebru u odnosu na uobičajene operacije sabiranja matrica, matričnog množenja i množenja matrice skalarom, dok je jedinična matrica upravo jedinica algebre. Pored toga, treba zapaziti da su elementi algebre $\mathbb{F}^{nn}$ linearni operatori u prostoru brojnih kolona $\mathbb{F}^n$, tj. da je $\mathbb{F}^{nn} = \hat{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n)$. Ubuduće će se pod algebrom podrazumevati asocijativna algebra sa jedinicom.

Kao i obično, izomorfizam algebri se definiše kao bijekcija koja održava strukturu.

Definicija 2.3 *Dve algebre, A_1 i A_2, nad istim poljem $\mathbb{F}$, su* izomorfne *ako postoji bijekcija g sa A_1 na A_2 takva da je:*

(*i*) $g(\alpha a + \beta b) = \alpha g(a) + \beta g(b)$, $\forall a, b \in A_1$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(*ii*) $g(ab) = g(a)g(b)$, $\forall a, b \in A_1$.

Jasno, prvi zahtev je održanje strukture vektorskog prostora, a drugi održanje strukture množenja, te se može reći da je g izomorfizam algebri ako je g invertibilni linearni operator sa A_1 na A_2, koji održava proizvod.

Ranije je pokazano (teorem 1.3), da je svaki n-dimenzionalni prostor nad poljem $\mathbb{F}$ izomorfan sa prostorom brojnih kolona $\mathbb{F}^n$, a uspostavljeni izomorfizam, određen izborom bazisa nazvan je reprezentovanje vektora brojnom kolonom. Slično je teoremom 2.1, stav (*iii*), uspostavljen izomorfizam vektorskog prostora $\hat{L}(U_n, V_m)$ sa prostorom matrica $\mathbb{F}^{mn}$. Naravno, u slučaju $U = V$, kako je upravo pokazano, oba prostora, $\hat{L}(V_n, V_n)$ i $\mathbb{F}^{nn}$ su asocijativne algebre sa jedinicom. Nameće se pitanje da li je preslikavanje F iz teorema 2.1, za koje je pokazano da je izomorfizam vektorskih prostora, istovremeno i izomorfizam algebri. Odgovor na ovo pitanje daje

Teorem 2.2 *Za svaki izbor bazisa $\{v_1, \dots, v_n\}$ vektorskog prostora $V_n(\mathbb{F})$, preslikavanje $F(A) = \mathcal{A}$, gde je $A \in \hat{L}(V, V)$, a $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrica iz $\mathbb{F}^{nn}$ definisana izrazom*

$$Av_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

je jedan izomorfizam algebre $\hat{L}(V, V)$ na algebru $\mathbb{F}^{nn}$.

▬ *Dokaz:* Treba samo proveriti da F održava strukturu množenja, što sledi iz činjenice da je u razmatranom slučaju $F(A) = f_V A f_V^{-1}$, te je $F(A)F(B) = f_V A f_V^{-1} f_V B f_V^{-1} = f_V AB f_V^{-1} = F(AB)$. ∎

Na ovaj način je zapravo pokazano da su sve algebre operatora nad izomorfnim prostorima međusobno izomorfne. Naime, izomorfizam f_{UV} prostora U na prostor V, indukuje izomorfizam F_{UV} algebri $\hat{L}(U, U)$ i $\hat{L}(V, V)$, zadat kao i u prethodnom teoremu, relacijom $F_{UV}(A) \stackrel{\text{def}}{=} f_{UV} A f_{UV}^{-1}$.

Relacija (2.2) se naziva *osnovna formula reprezentovanja*, a bijekcija koju ona uspostavlja zove se *reprezentovanje operatora matricama*, ostvareno izborom bazisa $\{v_1, \dots, v_n\}$ u prostoru V. Dakle, linearne operatore je, izborom bazisa u prostoru u kom deluju, uvek moguće reprezentovati matricama, što je vrlo pogodno sa operativne tačke gledišta, za dobijanje kvantifikovanih rezultata.

Određivanje matrice koja reprezentuje operator $A \in \hat{L}(V, V)$ u prostoru V sa skalarnim proizvodom, posebno je jednostavno kada je izabrani bazis $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormiran. Kada se obe strane osnovne formule reprezentovanja skalarno pomnože sleva bazisnim vektorom v_k, nalazi se $(v_k, Av_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}(v_k, v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\delta_{kj} = \alpha_{ki}$. Dobijena relacija $(v_k, Av_i) = \alpha_{ki}$ se često koristi u fizici, i praktično zamenjuje osnovnu formulu reprezentovanja, a u okviru kvantne mehanike izraz (v_k, Av_i) ima i fizičku interpretaciju.

Primeri

1. U bilo kom bazisu, identičnom operatoru se pridružuje jedinična matrica, a nultom nulta.

2. Neka je P operator u $\mathbb{R}^3$ koji svakom vektoru pridružuje njegovu projekciju na xy ravan. Izborom Descartes-ovog ortonormiranog bazisa $\{e_x, e_y, e_z\}$, operator P se reprezentuje matricom $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, jer je $Pe_x = e_x$, $Pe_y = e_y$ i $Pe_z = 0$.

3. Rotacije $R(\varphi)$ (za ugao φ) u $\mathbb{R}^3$, oko z ose, reprezentovane su u Descartes-ovom bazisu matricom $\mathcal{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, jer je $R(\varphi)e_x = \cos\varphi e_x + \sin\varphi e_y$, $R(\varphi)e_y = -\sin\varphi e_x + \cos\varphi e_y$ i $R(\varphi)e_z = e_z$.

4. U prostoru $P_n(\mathbb{R})$, operator izvoda D, se u bazisu $\{p_1 = 1, p_2 = t, \dots, p_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\}$ reprezentuje matricom $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ koja ima jedinice iznad glavne dijagonale, dok su ostali elementi nule, jer je $Dp_i = D\frac{t^i}{i!} = \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = p_{i-1}$.

5. Svaka matrica A iz $\mathbb{F}^{nn}$ je linearni operator u $\mathbb{F}^n$. Matrica koja reprezentuje ovaj linearni operator u apsolutnom bazisu prostora $\mathbb{F}^n$ je sâma ta matrica, tj. $\mathcal{A} = A$.

2.2 GEOMETRIJA DEJSTVA OPERATORA

Zahvaljujući linearnosti, odnosno činjenici da su operatori homomorfizmi prostora, njihovo delovanje ima jasnu geometrijsku interpretaciju, koja će biti proučena u ovom poglavlju.

2.2.1 Defekt i rang operatora

Prvi korak u tome je uočavanje da su skup svih vektora koji se preslikaju u nulti, kao i skup svih likova, potprostori.

Definicija 2.4 Nul-potprostor *ili* jezgro *operatora $A \in \hat{L}(U,V)$ je potprostor, $N(A)$, svih vektora iz U koje operator A preslikava u nulti vektor prostora V: $N(A) \overset{\text{def}}{=} \{u \in U \mid Au = 0\}$ (koristi se i oznaka* $\ker A$*). Potprostor, $R(A)$, svih vektora iz V koji su likovi vektora iz U naziva se* domet *ili* potprostor likova *operatora A:* $R(A) = \{Au \mid \forall u \in U\}$. Defekt *i* rang *operatora A su dimenzije potprostorâ $N(A)$ i $R(A)$, respektivno.*

Kako je u definiciji navedeno, skupovi $N(A)$ i $R(A)$ su potprostori, što se lako proverava. Naime, ako su x i y iz $N(A)$, tj. ako je ispunjeno $Ax = 0$ i $Ay = 0$, onda je i $A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay = 0$, tj. proizvoljna linearna kombinacija vektora iz $N(A)$ je i sama vektor iz istog skupa. Slično, za $v, v' \in R(A)$, postoje $u, u' \in U$, takvi da je $v = Au$ i $v' = Au'$, pa je $\alpha v + \beta v' = \alpha Au + \beta Au' = A(\alpha u + \beta u')$, odnosno i $\alpha v + \beta v'$ je iz $R(A)$.

Vezu defekta i ranga operatora u konačnodimenzionalnim prostorima opisuje

Teorem 2.3 (Sylvester-ov zakon defekta) *Zbir dimenzija nul-potprostora i potprostora likova operatora $A \in \hat{L}(U,V)$ jednak je dimenziji prostora U:* $\dim N(A) + \dim R(A) = \dim U$.

▬ *Dokaz:* Neka je $B_N = \{u_1, \dots, u_k\}$ bazis u $N(A)$. Taj bazis se može dopuniti do bazisa u U, jer je $N(A) < U$: $B_U = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots u_n\}$. Treba pokazati da je skup $B_R = \{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ jedan bazis u $R(A)$, tj. da je obrazujući za $R(A)$ i linearno nezavisan. Za proizvoljan vektor $v \in R(A)$ postoji $u \in U$, takav da je $Au = v$; kako se u može razviti po bazisu B_U, važi $u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i$, pa je $v = Au = \sum_{i=1}^{n} \xi_i Au_i = \sum_{i=k+1}^{n} \xi_i Au_i$, jer je $Au_i = 0$ za $i = 1, \dots, k$. Dakle, proizvoljan vektor v iz $R(A)$ je linearna kombinacija vektora iz B_R, tj. $R(A) = L(Au_{k+1}, \dots, Au_n)$, B_R je obrazujući skup. Linearna nezavisnost skupa B_R, sledi iz činjenice da je uslov $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i Au_i = 0$ zadovoljen samo ako su svi koeficijenti α_i jednaki nuli: zbog linearnosti operatora A, uslov, prepisan u formi $A \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i u_i = 0$, znači da je vektor $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i u_i$ iz nul-potprostora, $N(A)$, te se može razviti po bazisu B_N; tako je $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$, odnosno, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-\alpha_i) u_i = 0$, pa iz linearne nezavisnosti bazisa B_U sledi da su svi α_i $(i = 1, \dots, n)$ jednaki nuli. ∎

Geometrijski smisao Sylvester-ovog zakona postaje jasan kada se uoči da je izborom vektora $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ određen jedan direktni komplement W od $N(A)$, pa time i razlaganje prostora U: $U = N(A) \oplus W$. Drugačijim izborom se mogao dobiti bilo koji drugi direktni komplement. Kako preslikava bazis $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ potprostora W u bazis $\{Au_{k+1}, \dots, Au_n\}$ potprostora $R(A)$, operator A je izomorfizam W (ali i svakog drugog direktnog komplementa!) na $R(A)$. Tako se zakon defekta manifestuje kao teorem 1.10, $\dim N(A) + \dim W = \dim U$, primenjen na uočeno razlaganje prostora U.

2.2.2 (Ne)singularnost i invertibilnost

Treba zapaziti da se pri fiksiranom $x_0 \in W$, svi vektori iz skupa $S_{x_0} = \{x + x_0 \,|\, x \in N(A)\}$ preslikavaju u isti vektor $Ax_0 \in V$: $A(x + x_0) = Ax + Ax_0 = 0 + Ax_0 = Ax_0$. Posledica ovog zapažanja je da je A bijekcija ako i samo ako je $N(A) = \{0\}$.

Definicija 2.5 *Ako je $A \in \hat{L}(U_n(\mathbb{F}), V_m(\mathbb{F}))$ injektivno $(1-1)$ preslikavanje, kaže se da je A* nesingularan *ili* regularan operator*, a u suprotnom slučaju da je* singularan*. Ako je A bijekcija, onda se kaže da je A* invertibilan operator*; tada postoji* inverzni operator *$A^{-1} : V \to U$, takav da je $A^{-1}A = I_U$ i $AA^{-1} = I_V$, gde su I_U i I_V jedinični operatori u prostorima U i V, respektivno.*

Inverzni operator A je takođe linearna transformacija, što se lako proverava: za svako y iz V, postoji, i jedinstveno je određen (jer je A bijekcija), vektor $x \in U$ za koji važi $Ax = y$, pa je inverzni operator, A^{-1}, definisan tako da bude $A^{-1}y = x$; ako je $Ax_1 = y_1$ i $Ax_2 = y_2$, zbog linearnosti operatora A je $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$, tako da je $A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2$. Jasno je da je operator A^{-1} i sâm invertibilan. U stvari, invertibilni operator je izomorfizam prostora U i V, što znači da oni moraju biti iste dimenzije. Trivijalan primer invertibilnog operatora je identična transformacija I na datom vektorskom prostoru. S druge strane, nulti opertator 0 nije ni invertibilan, ni nesingularan.

Teorem 2.4 *Linearni operator A iz $\hat{L}(U_n(\mathbb{F}), V_m(\mathbb{F}))$ je nesingularan ako i samo ako je ispunjen neki od sledećih uslova:*

(i) *nul-potprostor operatora A je nulti: $N(A) = \{0\}$;*

(ii) *svaki linearno nezavisan skup vektora iz U operator A preslikava u linearno nezavisan skup vektora u V, odnosno A održava linearnu nezavisnost.*

▬ *Dokaz:* (i) Ako je A nesingularan operator, tj. $1-1$ preslikavanje, samo se nulti vektor iz U preslikava u nulti vektor u V, što upravo znači trivijalnost nul-potprostora. Obratno, ako je

$N(A)$ trivijalan, i $Au = v$, na osnovu komentara pre definicije 2.5, sledi da je u jedini vekor čiji je lik v, tj. preslikavanje A je injekcija.
(ii) Ako A održava linearnu nezavisnost, onda on bazis u U prevodi u bazis potprostora likova $R(A)$. Kako je prema Sylvester-ovom zakonu defekta (teorem 2.3) $\dim N(A) + \dim R(A) = \dim U$, trivijalnost nul-potprostora je očigledna: $\dim N(A) = 0$.
Obratno, ako je $\dim N(A) = 0$, onda je prema istom zakonu $\dim R(A) = \dim U$, što je jedino moguće ako A održava linearnu nezavisnost. ∎

Direktna posledica ovog teorema je da nesingularan operator $A \in \hat{L}(U, U)$ preslikava bazis u bazis, odnosno da svaka dva bazisa u U definišu jedan nesingularan operator A koji preslikava jedan bazis u drugi.

Ako operator deluje u konačnodimenzionalnom prostoru pojmovi nesingularnosti i invertibilnosti su nerazličivi.

Teorem 2.5 *Operator $A \in \hat{L}(U, U)$, gde je U konačnodimenzionalni vektorski prostor, je invertibilan ako i samo ako je nesingularan.*

▬ *Dokaz:* Ako je A invertibilan, onda je, po definiciji, nesingularan. Obratno, ako je A nesingularan, onda je, prema teoremu 2.4, njegov nul-potprostor trivijalan. To dalje ima za posledicu jednakost dimenzija domena U i potprostora likova $R(A)$, prema Sylvester-ovom zakonu defekta, teorem 2.3. Dakle, $R(A) = U$, pa je A invertibilan. ∎

Treba uočiti da je konačnost dimenzije prostora U omogućila zaključak $R(A) = U$. U slučaju beskonačnodimenzionalnih prostorâ iz jednakosti dimenzijâ ne sledi jednakost prostorâ. Naime, beskonačnodimenzionalni prostor može imati netrivijalan beskonačnodimenzionalni potprostor.

Svaki nesingularan operator $A \in \hat{L}(U, U)$ je jedan *automorfizam* prostora U, tj. izomorfno preslikavanje strukture na samu sebe.

U skupu svih linearnih transformacija na prostoru U, tj. u $\hat{L}(U, U)$ može se izdvojiti podskup $\mathrm{GL}(U)$ svih nesingularnih operatora. Proizvod dva nesingularna operatora je nesingularan, što se lako proverava. Pošto je U konačne dimenzije, to na osnovu prethodnog teorema sledi da svaki nesingularan operator ima inverzni, koji je i sâm nesingularan i za koji važi $AA^{-1} = A^{-1}A = I_U$. Množenje operatora je asocijativno, a identični operator I_U je trivijalan primer nesingularnog, tako da podskup $\mathrm{GL}(U)$ svih nesingularnih operatora čini grupu, koja se zove *opšta linearna grupa* i koja predstavlja za fiziku veoma važnu grupu svih automorfizama vektorskog prostora U. U specijalnom slučaju $U = \mathbb{F}^n$, opšta linearna grupa se označava sa $GL(n, \mathbb{F})$.

2.2.3 Rang matrice

Kako je rad sa operatorima u apstraktnim vektorskim prostorima najjednostavniji ako se koristi matrična reprezentacija, razrađen je način određivanja ranga (time i defekta i singularnosti) matrica. Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljna matrica iz $\mathbb{F}^{mn}$. Kada ova matrica deluje nadesno na kolone u $\mathbb{F}^n$ ona je linearni operator u $\mathbb{F}^n$, tj. $\mathcal{A} \in \hat{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. Likovi vektora apsolutnog bazisa u $\mathbb{F}^n$ su kolone matrice $\mathcal{A}$. Dakle, $R(\mathcal{A}) = L(C_1, \dots, C_n)$, gde su sa $C_i \in \mathbb{F}^m$ označene kolone matrice $\mathcal{A}$. S druge strane, ako matrica $\mathcal{A}$ deluje nalevo na vrste iz $\mathbb{F}^{1m}$, ona je linearni operator u $\mathbb{F}^{1m}$, a oblast likova je lineal nad njenim vrstama R_i, $(i = 1, \dots, m)$ koje su vektori u $\mathbb{F}^{1n}$. Dimenzija potprostora kolona matrice $\mathcal{A}$, tj. $\dim L(C_1, \dots, C_n)$ se zove *rang kolona matrice* $\mathcal{A}$, a dimenzija potprostora vrsta matrice $\mathcal{A}$, tj. $\dim L(R_1, \dots, R_m)$ se zove *rang vrsta matrice* $\mathcal{A}$.

Teorem 2.6 (i) *Rang vrsta jednak je rangu kolona. (Taj broj se zove* rang matrice.*)*

(ii) *Ako je $A \in \hat{L}(U_n(\mathbb{F}), V_m(\mathbb{F}))$ i ako matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{mn}$ reprezentuje operator A, onda je rang operatora A jednak rangu matrice $\mathcal{A}$.*

▬ *Dokaz:* (i) Neka je $\mathcal{A}$ matrica iz $\mathbb{F}^{mn}$, sa elementima $a_{ij} \in \mathbb{F}$. Dalje, neka su $R_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, \ldots, m$ vrste, a $C_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$, $j = 1, \ldots, n$ kolone, matrice $\mathcal{A}$. Ako je rang vrsta jednak r, onda postoji bazis u potprostoru vrsta, $E = \{E_1, \ldots, E_r\}$, sa r vektora $E_i = (e_{i1}, \ldots, e_{in}) \in \mathbb{F}^{1n}$. Tako je svaka vrsta linearna kombinacija bazisa E: $R_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} E_j$, $i = 1, \ldots, m$. Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata na levoj i desnoj strani prethodnog izraza, dobija se sistem jednačina: $a_{ik} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} e_{jk}$, $i = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$. Ovaj sistem se može zapisati i kao vektorska jednakost u prostoru kolona $\mathbb{F}^m$:

$$C_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = e_{1k} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + e_{rk} \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \vdots \\ \alpha_{mr} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dakle, svaka kolona C_k matrice $\mathcal{A}$ se može napisati kao linearna kombinacija r vektora iz $\mathbb{F}^m$, tj. skup $\{(\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{mi})^T \mid i = 1, \ldots, r\}$ obrazuje potprostor kolona matrice $\mathcal{A}$. Prema tome, rang kolona je manji ili jednak od ranga vrsta r.
Analognom analizom transponovane matrice $\mathcal{A}^T$ dolazi se do zaključka da je rang vrsta r manji ili jednak od ranga kolona. Iz dobijene dve nejednakosti sledi jednakost rangova vrsta i kolona matrice.
(ii) Neka je $\{u_1, \ldots, u_n\}$ bazis u prostoru U, a $\{v_1, \ldots, v_m\}$ bazis u prostoru V. Ovakvom izboru bazisâ u prostorima U i V, prema osnovnoj formuli reprezentovanja $Au_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} v_j$, $i = 1, \ldots, n$, operatoru A odgovara reprezentaciona matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{mn}$ čiji elementi su $\{\alpha_{ij}\}$. Vektori $\{Au_1, \ldots, Au_n\}$ obrazuju potprostor likova $R(A)$, a rang operatora A je jednak dimenziji lineala ovog skupa, tj. broju linearno nezavisnih vektora među njima. Sâmi bazisni vektori $\{u_1, \ldots, u_n\}$ reprezentovani su u $\mathbb{F}^n$ apsolutnim bazisom, dok su vektori $\{Au_1, \ldots, Au_n\}$ reprezentovani kolonama matrice $\mathcal{A}$. Zbog izomorfizma (jer reprezentovanje je jedan konkretan izomorfizam određen izborom bazisa) broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{Au_1, \ldots, Au_n\}$ jednak je broju linearno nezavisnih kolona matrice $\mathcal{A}$, tj. rang matrice jednak je rangu njome reprezentovanog operatora. ▮

Rang nesingularnog operatora $A \in \hat{L}(U, U)$ jednak je dimenziji n prostora U. Rang matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{nn}$ koja reprezentuje dati operator u proizvoljnom bazisu, je prema teoremu 2.6, takođe n. Da bi matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{nn}$ imala rang n potrebno je i dovoljno da njena determinanta bude različita od nule. Kako determinanta matrice ne zavisi od bazisa reprezentovanja (ovo će biti pokazano kasnije) nenultost determinante reprezentacione matrice datog operatora je pogodan praktičan kriterijum njegove nesingularnosti.

2.2.4 Sistemi linearnih jednačina

Uz pomoć gore razvijene teorije, moguće je jasno i koncizno analizirati sisteme linearnih jednačina. Sistem od m jednačina $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, sa n nepozanatih, $x_1, \ldots, x_n$, postaje, uvođenjem matrice $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{mn}$, i kolona $b \stackrel{\text{def}}{=} (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{F}^m$, i $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{F}^n$, jedna jednačina po vektoru x: $\mathcal{A}x = b$. Jasno je da početni sistem ima rešenje ako i samo ako vektor $b \in \mathbb{F}^m$ pripada potprostoru likova $R(\mathcal{A})$. Kako kolone matrice $\mathcal{A}$ obrazuju $R(\mathcal{A})$, treba proveriti da li se vektor b može dobiti kao njihova linearna kombinacija.

Ako postoji jedno rešenje, postavlja se pitanje kako naći sva rešenja. Ako je $z \in \mathbb{F}^n$ neko partikularno rešenje nehomogenog sistema $\mathcal{A}x = b$, onda se skup svih rešenja ovog sistema sastoji od vektora oblika $x = z + u$, gde vektor u prolazi ceo nul-potprostor $N(\mathcal{A})$, tj. vektor u prolazi sva rešenja homogenog sistema $\mathcal{A}u = 0$. Očigledno je da iz trivijalnosti potprostora $N(\mathcal{A})$, tj. iz nesingularnosti matrice $\mathcal{A}$ sledi jedinstvenost rešenja. Ovo je zapravo iskaz poznatogKronecker-Capelli-jevog teorema: sistem linearnih jednačina ima rešenje ako i samo ako je rang tzv. proširene matrice $\overline{\mathcal{A}}$ (matrica $\mathcal{A}$ kojoj je dodata kolona b kao poslednja) jednak rangu matrice $\mathcal{A}$. Naime, ako se rang matrice shvati kao rang kolona, jasno je da se pri proširivanju kolonom b rang matrice ne menja, ako i samo ako je b linearna kombinacija kolona matrice $\mathcal{A}$, tj. vektor iz $R(\mathcal{A})$.

Kada je na opisani način rešeno pitanje egzistencije rešenja sistema jednačina, preostao je problem jednoznačnosti, i definisanje algoritma za nalaženje svih rešenja. U skladu sa komentarom nakon teorema 2.3, u isti vektor b iz $R(\mathcal{A})$ preslikava se ceo skup $\{y + v \,|\, v \in N(\mathcal{A})\}$, gde je $y \in \mathbb{F}^n$ proizvoljni vektor koji zadovoljava uslov $\mathcal{A}y = b$, tj. neko partikularno rešenje posmatranog sistema. Kako su vektori iz $N(\mathcal{A})$ rešenja *homogenog sistema*, $\mathcal{A}v = 0$, dobija se poznata formulacija da je opšte rešenje nehomogenog linearnog sistema jednačina zbir jednog partikularnog rešenja tog sistema i opšteg rešenja odgovarajućeg homogenog sistema. Konačno, jasno je da je jedinstvenost rešenja ekvivalentna trivijalnosti potprostora $N(\mathcal{A})$, tj. nesingularnosti matrice $\mathcal{A}$.

2.2.5 Reprezentovanje i promena bazisa

Već je više puta naglašeno da je svako reprezentovanje vektora brojnim kolonama kao i svako reprezentovanje operatora matricama, jedan konkretan izomorfizam, određen izborom bazisa u datom vektorskom prostoru. Pri tome se bazisu reprezentovanja pridružuju kolone apsolutnog bazisa. Postavlja se pitanje, kako će se promeniti reprezentaciona kolona, a kako reprezentaciona matrica ako se sa starog pređe na neki novi bazis datog vektorskog prostora.

Teorem 2.7 *Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ bazis u vektorskom prostoru $V_n(\mathbb{F})$ i neka je $T \in \hat{L}(V, V)$ nesingularan linearan operator. Neka je $TX = \{Tx_1, \ldots, Tx_n\}$, novi bazis u V dobijen iz X* operatorom prelaska *T i neka je $\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{nn}$ odgovarajuća* matrica prelaska*, čiji su elementi, $\{\tau_{ij} \,|\, i, j = 1, \ldots, n\}$, određeni osnovnom formulom reprezentovanja: $Tx_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ji} x_j$.*

(*i*) *Ako je vektor $v \in V$ u bazisu X reprezentovan kolonom $\mathtt{v} \in \mathbb{F}^n$, u bazisu TX, vektor v je reprezentovan kolonom $\mathcal{T}^{-1}\mathtt{v} \in \mathbb{F}^n$.*

(*ii*) *Ako je operator $A \in \hat{L}(V, V)$ u bazisu X reprezentovan matricom $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{nn}$, u bazisu TX, isti operator je reprezentovan matricom $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T} \in \mathbb{F}^{nn}$.*

■ *Dokaz:* (*i*) Vektor $v \in V$ se može izraziti kao linearna kombinacija bazisnih vektora iz X: $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ i bazisnih vektora iz TX: $v = \sum_{i=1}^n \alpha'_i x'_i$, gde je $x'_i = Tx_i$. Time su uspostavljena dva izomorfizma, i_1 i i_2 između prostora V i prostora $\mathbb{F}^n$: $v \xrightarrow{i_1} \mathtt{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ i $v \xrightarrow{i_2} \mathtt{v}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)^T$. Kada se u razvoju po bazisu TX bazisni vektori x'_i izraze preko starih bazisnih vektora x_i dobija se $v = \sum_{i=1}^n \alpha'_i x'_i = \sum_{i=1}^n \alpha'_i \sum_{j=1}^n \tau_{ji} x_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n \tau_{ji} \alpha'_i) x_j$. Kako je, s

druge strane, $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, na osnovu jedinstvenosti koeficijenata u razlaganju vektora po bazisu, sledi $\alpha_j = \sum_{i=1}^n \tau_{ji}\alpha'_i$ ili $\mathtt{v} = \mathcal{T}\mathtt{v}'$, tj. $\mathtt{v}' = \mathcal{T}^{-1}\mathtt{v}$.
(*ii*) Neka je $Ax_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}x_j$ i $Ax'_i = \sum_{j=1}^n \alpha'_{ji}x'_j$, tj. operator A je reprezentovan matricom $\mathcal{A}$, čiji elementi su $\{\alpha_{ij}\}$, u bazisu X i matricom $\mathcal{A}'$, čiji elementi su $\{\alpha'_{ij}\}$, u bazisu TX. Kada se u relaciji za Ax'_i, vektori x'_i izraze preko bazisa X, dobija se

$$\underline{Ax'_i} = \sum_{j=1}^n \alpha'_{ji}x'_j = \sum_{j=1}^n \alpha'_{ji}\sum_{k=1}^n \tau_{kj}x_k = \underline{\sum_{k=1}^n(\sum_{j=1}^n \alpha'_{ji}\tau_{kj})x_k}.$$

S druge strane je

$$\underline{Ax'_i} = A(\sum_{j=1}^n \tau_{ji}x_j) = \sum_{j=1}^n \tau_{ji}(Ax_j) = \sum_{j=1}^n \tau_{ji}\sum_{k=1}^n \alpha_{kj}x_k = \underline{\sum_{k=1}^n(\sum_{j=1}^n \tau_{ji}\alpha_{kj})x_k}.$$

Opet, na osnovu jedinstvenosti koeficijenata u razvoju vektora po bazisu, sledi $\sum_{j=1}^n \tau_{kj}\alpha'_{ji} = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}\tau_{ji}$, tj. $(\mathcal{T}\mathcal{A}')_{ki} = (\mathcal{A}\mathcal{T})_{ki}$, $(i,k = 1,\dots,n)$. Ista relacija u matričnom obliku je $\mathcal{T}\mathcal{A}' = \mathcal{A}\mathcal{T}$, tj. $\mathcal{A}' = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$. ∎

U literaturi se uvode i pojmovi matrice razvijanja $\mathcal{R} = \mathcal{T}^T$ i kontragredijentne matrice $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{-1}$ matrici razvijanja. Tada je $\mathtt{v}' = \mathcal{S}\mathtt{v}$ i $\mathcal{A}' = \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{S}^{-1}$.

Transformacija $\mathcal{T}^{-1}\dots\mathcal{T}$ se naziva *transformacija sličnosti*. Lako se proverava da je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. da je transformacija sličnosti jedna relacija ekvivalencije na skupu matrica. Naime, skup $\{\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})\}$ reprezentuje jedan isti operator u svim bazisima prostora $V_n(\mathbb{F})$. One osobine, koje su zajedničke za ceo skup sličnih matrica, nazivaju se *invarijante operatora*, jer ne zavise od bazisa, te ne karakterišu reprezentacionu matricu, već sam operator. Lako je proveriti da su trag i determinanta invarijante.

Ako se bazisni vektori iz bazisa X, definisanog u teoremu 2.7 zapišu kao vrsta i ako se na tu vrstu deluje matricom prelaska $\mathcal{T}$ zdesna, dobija se vrsta čiji su elementi vektori novog bazisa TX:

$$(x_1,\dots,x_n)\mathcal{T} = (\sum_{i=1}^n x_i\tau_{i1},\dots,\sum_{i=1}^n x_i\tau_{in}) = (x'_1,\dots,x'_n).$$

Za bazisne vektore se kaže da se pri promeni bazisa transformišu *kovarijantno*. S druge strane, reprezentacione kolone se transformišu pomoću matrice $\mathcal{T}^{-1}$ koja deluje na desno: $\mathcal{T}^{-1}\mathtt{v} = \mathtt{v}'$. Za njih se kaže da se pri promeni bazisa transformišu *kontravarijantno*. Očigledno, u skladu sa uvedenom terminologijom, reprezentacione matrice se pri promeni bazisa transformišu jedan put kovarijantno i jedan put kontravarijantno.

2.2.6 Invarijantni potprostori

U analizi geometrije delovanja linearnog operatora na nekom prostoru, posebnu ulogu imaju oni potprostori koji su zatvoreni za dejstvo operatora, tj. čije vektore operator preslikava unutar istog potprostora.

Definicija 2.6 *Kaže se da je potprostor W* invarijantan *pod delovanjem operatora A, ili* invarijantni potprostor *operatora A, ako iz $x \in W$ sledi $Ax \in W$, tj. ako A preslikava W u samog sebe ($AW < W$). Tada se suženje preslikavanja A na potprostor W, tj. operator $A_W \in \hat{L}(W,W)$ definisan sa $A_W x = Ax$ za svako $x \in W$, naziva* redukovani operator *operatora A.*

Jasno je da ukoliko W nije invarijantni potprostor operatora A, suženje operatora A na W nije operator iz $\hat{L}(W,W)$, jer njegova oblast likova nije potprostor u W.

Ukoliko se operator $A \in \hat{L}(V_n, V_n)$, za koji je potprostor W_m ($m \leq n$) invarijantan, reprezentuje u adaptiranom bazisu $\{x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n\}$, u kome prvih m vektora čini bazis u W, tada su, za $i \leq m$ vektori Ax_i iz W, i osnovna formula reprezentovanja postaje $Ax_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} x_i$ (sumira se do m, a ne do dimenzije celog prostora). Pri tome dobijeni koeficijenti formiraju matricu $\mathcal{A}_W$ koja u bazisu $\{x_1, \ldots, x_m\}$ prostora W reprezentuje redukovani operator A_W. Stoga matrica operatora A u navedenom adaptiranom bazisu $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_W & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, gde su zvezdicama označene podmatrice koeficijenata α_{ij} za $j > m$.

Primer invarijantnog potprostora je nul-potprostor operatora. Odgovarajući redukovani operator je $A_{N(A)} = 0$.

Neka su i W i neki njegov direktni (ne obavezno ortogonalni) komplement, W', invarijantni potprostori operatora A, tj. $V = W \oplus W'$ je dekompozicija prostora V na invarijantne potprostore. U oba potprostora se mogu definisati redukovani operatori A_W i $A_{W'}$. Za svaki vektor $x \in V$ su jednoznačno određene njegove komponente w i w' iz W i W', respektivno, $x = w + w'$, pa je $Ax = Aw + Aw' = A_W w + A_{W'} w'$. Vidi se da je operator A potpuno određen redukovanim operatorima, i kaže se da je A *razložen* na operatore A_W i $A_{W'}$; ovo se označava sa $A = A_W \oplus A_{W'}$, imajući u vidu da je ceo prostor V direktni zbir potprostora W i W'. Koristeći adaptirani bazis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sa prvih m vektora iz W, a preostalih $n-m$ vektora iz W', po analogiji sa prethodnim postupkom, osnovna formula reprezentovanja daje $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_W & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{W'} \end{pmatrix}$, gde je $\mathcal{A}_{W'}$ matrica koja operator $A_{W'} \in \hat{L}(W', W')$ reprezentuje u bazisu $\{x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ prostora W'.

Naravno, sve što je rečeno može se lako uopštiti za slučaj kada je V dekomponovan na više invarijantnih potprostora operatora A, i jasno je da se operator tada razlaže na više redukovanih operatora, dok mu je u adaptiranom bazisu matrica kvazidijagonalna.

2.3 OPERATORI U PROSTORIMA SA SKALARNIM PROIZVODOM

2.3.1 Linearni funkcionali

Kao što je već ranije rečeno, skup operatora $\hat{L}(U_n, V_m)$ je vektorski prostor dimenzije mn. Specijalan slučaj je prostor $\hat{L}(U_n(\mathbb{F}), \mathbb{F})$, dimenzije n, jer polje je jednodimenzionalni prostor nad samim sobom. Vektori iz ovog prostora su linearni operatori koji vektore iz U preslikavaju u skalare. Ovi linearni operatori nose poseban naziv:

Definicija 2.7 Linearni funkcional *na vektorskom prostoru $V(\mathbb{F})$ je funkcija definisana na V sa vrednostima u polju $\mathbb{F}$, koja linearnoj kombinaciji vektora pridružuje istu takvu linearnu kombinaciju skalara:*

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y).$$

Kao i svaki linearni operator, linearni funkcional je zadat delovanjem na bilo koji bazis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ u V: ako je $\varphi(v_i) = \varphi_i$, tada za $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ važi $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$.

U prostoru sa skalarnim proizvodom, svaki vektor $f \in V$ definiše jedan linearni funkcional izrazom $\varphi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (f, v)$, za svako v iz V. Dakle, preko skalarnog proizvoda, sa fiksiranim prvim argumentom, jednoznačno je definisano linearno (zbog linearnosti skalarnog proizvoda po drugom članu) preslikavanje sa V na $\mathbb{F}$. Ispostavlja se da važi i obrnut iskaz:

Teorem 2.8 (Riesz-Fréchet) *Za svaki linearni funkcional φ definisan na prostoru V, konačne dimenzije n, sa definisanim skalarnim proizvodom, postoji jedan i samo jedan vektor f iz V, za koji važi: $\varphi(v) = (f, v)$ za svako v iz V.*

▬ *Dokaz:* Neka je $\{v_1, \dots, v_n\}$ neki ortonormirani bazis u V. Potrebno je naći vektor f koji određuje funkcional φ preko $\varphi(v) = (f, v)$. Vektor f se može razviti po datom ortonormiranom bazisu (koeficijenti razvoja su Fourier-ovi): $f = \sum_{i=1}^{n} (v_i, f) v_i$. S druge strane, dejstvo linearnog operatora, pa i funkcionala, određeno je delovanjem na bazis, tj. zadavanjem skupa $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\}$, dakle $\varphi(v_i) = (f, v_i) = (v_i, f)^*$, pa je $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi^*(v_i) v_i$ traženi vektor. Još treba pokazati njegovu jedinstvenost. Neka postoji i neki drugi vektor f' takav da je $\varphi(v) = (f', v)$ za svako v iz V. Onda je $(f - f', v) = 0$, za svako v iz V, pa i za $v = f - f'$, odakle sledi $\| f - f' \| = 0$ odnosno, $f = f'$. ▮

U beskonačnodimenzionalnim unitarnim prostorima ovaj teorem važi samo za ograničene[2] funkcionale [3].

2.3.2 Adjungovani operator

Uz pomoć Riesz-Fréchet-ovog teorema dokazuje se sledeći

Teorem 2.9 *Ako je A linearni operator na prostoru konačne dimenzije sa definisanim skalarnim proizvodom, V, tada postoji jedan i samo jedan operator $A^\dagger$, definisan relacijom $(x, Ay) = (A^\dagger x, y)$ za svako x i y iz V.*

▬ *Dokaz:* Neka je x proizvoljan, fiksirani vektor iz V. Preslikavanje, definisano operatorom A i vektorom x, koje svakom vektoru y iz V pridružuje broj (x, Ay), linearni je funkcional: $\varphi_{A,x}(y) = (x, Ay)$. Prema Riesz-Fréchet-ovom teoremu, postoji jednistven vektor x' iz V, takav da je $\varphi_{A,x}(y) = (x', y)$, za svako y iz V. Na taj način, operatorom A zadato je na prostoru V preslikavanje $x \mapsto x'$, koje se označava sa $A^\dagger$: $A^\dagger x = x'$, za svako $x \in V$. Dakle, $(x, Ay) = (A^\dagger x, y)$, za sve $x, y \in V$. ▮

U slučaju beskonačnodimenzionalnih prostorâ, prethodni teorem važi samo za ograničene operatore.

Definicija 2.8 *Operator $A^\dagger$, pridružen operatoru $A \in \hat{L}(V, V)$ relacijom $(x, Ay) = (A^\dagger x, y)$ za svako $x, y \in V$, naziva se* adjungovani *ili* hermitski konjugovani operator *operatoru A.*

Lako je proveriti linearnost operatora $A^\dagger$. Za proizvoljan vektor $z \in V$ važi: $(A^\dagger(\alpha x + \beta y), z) = (\alpha x + \beta y, Az) = \alpha^*(x, Az) + \beta^*(y, Az) = \alpha^*(A^\dagger x, z) + \beta^*(A^\dagger y, z) = (\alpha A^\dagger x + \beta A^\dagger y, z)$. Iz proizvoljnosti vektora z sledi jednakost prvih faktora u skalarnom proizvodu, tj. $A^\dagger(\alpha x + \beta y) =$

[2]Funkcional $\varphi \in \hat{L}(V, \mathbb{F})$ je ograničen ako postoji pozitivan realan broj α takav da je $\| \varphi(v) \| \leq \alpha \| v \|$, za svako $v \in V$.

[3]U ovom udžbeniku su svi operatori (pa i funkcionali) definisani na celom prostoru, pa u skladu s tim, sve primedbe koje se odnose na beskonačnodimenzionalne prostore podrazumevaju operatore definisane na celom prostoru.

$\alpha A^\dagger x + \beta A^\dagger y$. Kako je, nasuprot definiciji operatora, operacija adjungovanja vezana za skalarni proizvod u prostoru u kome operator deluje, istom operatoru, pri izboru drugog skalarnog proizvoda, odgovara drugi adjungovani operator. Stoga će se ubuduće podrazumevati da je u prostoru u kome se vrši adjungovanje operatora zadat neki skalarni proizvod.

Osnovne osobine adjungovanog operatora u konačnodimenzionalnom slučaju su navedene u sledećem stavu.

Teorem 2.10 (i) *Unarna operacija adjungovanja je* involutivna, $(A^\dagger)^\dagger = A$, *i antilinearna,* $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$, $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$. *Za proizvod operatora važi* $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$*;*

(ii) *Ako se u ortonormiranom bazisu operator* A *reprezentuje matricom* $\mathcal{A}$*, onda se u istom bazisu adjungovani operator* $A^\dagger$ *reprezentuje transponovanom i kompleksno konjugovanom matricom u odnosu na* $\mathcal{A}$*:* $\mathcal{A}^{T*}$*. (Takva matrica se zove adjungovana i piše se* $\mathcal{A}^{T*} = \mathcal{A}^\dagger$*.)*

(iii) $\dim R(A^\dagger) = \dim R(A)$, $\dim N(A^\dagger) = \dim N(A)$*;*

(iv) *Iz* $AW < W$ *sledi* $A^\dagger W^\perp < W^\perp$*, tj. ako je potprostor* W *invarijantan za* A*, onda je njegov ortokomplement* $W^\perp$ *invarijantan za* $A^\dagger$*;*

(v) $N(A)^\perp = R(A^\dagger)$*;*

▬ *Dokaz:* (i) Direktno na osnovu definicije 2.8.
(ii) Ranije je bilo izvedeno da matrica $\mathcal{A}$ koja reprezentuje operator A u ortonormiranom bazisu $\{v_1, \dots, v_n\}$ ima elemente $\alpha_{ij} = (v_i, Av_j)$, što se može zapisati i kao $\alpha_{ij} = (A^\dagger v_i, v_j) = (v_j, A^\dagger v_i)^*$. Ako se sa β_{ij} označe elementi matrice $\mathcal{B}$ koja u istom bazisu reprezentuje adjungovani operator, tj. $\beta_{ij} = (v_i, A^\dagger v_j)$, tada je $\alpha_{ij} = \beta^*_{ji}$, odnosno, $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\dagger$.
(iii) Prema teoremu 2.6, rang operatora jednak je rangu reprezentacione matrice. S druge strane, transponovanje i konjugovanje matrice ne menja njen rang. Drugi deo stava neposredno sledi iz Sylvester-ovog zakona defekta.
(iv) Neka su x i y proizvoljni vektori iz $W^\perp$ i W, respektivno. Tada je $0 = (x, Ay) = (A^\dagger x, y)$.
(v) Za proizvoljne vektore $x \in R(A^\dagger)$ i $y \in N(A)$ važi $(x, y) = (A^\dagger z, y) = (z, Ay) = (z, 0) = 0$. Dakle, $R(A^\dagger) \perp N(A)$, i $R(A^\dagger)$ se sadrži u ortokomplementu od $N(A)$. Kako je ranije pokazano, $\dim R(A) = \dim R(A^\dagger)$, sledi da je $\dim R(A^\dagger) = \dim N(A)^\perp$. ▮

Treba naglasiti da veza između matrica koje reprezentuju operatore A i $A^\dagger$ nije tako jednostavna u bazisima koji nisu ortonormirani, i u opštem slučaju adjungovani operator se ne reprezentuje adjungovanom matricom.

2.3.3 Osnovne osobine i vrste operatora

Na osnovu odnosa operatora i njegovog adjungovanog može se izvršiti izdvajane nekoliko klasa operatora, koji će kasnije, zbog potreba u fizici, biti potpunije proučeni.

Definicija 2.9 *Linearni operator* A*, u prostoru sa skalarnim proizvodom, se naziva:*

(i) normalni operator*, ako komutira sa svojim adjungovanim:* $[A, A^\dagger] \stackrel{\text{def}}{=} AA^\dagger - A^\dagger A = 0$*;*

(*ii*) hermitski *(ili* autoadjungovan*)*[4], *odnosno* kosohermitski *operator ako je jednak svom adjungovanom,* $A = A^\dagger$*, odnosno ako je jednak negativnom adjungovanom,* $A = -A^\dagger$*; za realne prostore koriste se nazivi* simetričan *(*$A = A^T$*) odnosno* antisimetričan *(*$A = -A^T$*) operator;*

(*iii*) pozitivan *ako je hermitski i ako je* $(x, Ax) \geq 0$ *za svako* x *iz* V*; operator* A *je* strogo pozitivan *ili* pozitivno definitan *ako je* $(x, Ax) > 0$ *za svaki nenulti vektor* x *iz* V*;*

(*iv*) statistički*, ako je pozitivan i ako ima jedinični trag* $\operatorname{Tr} A = 1$*;*

(*v*) projektor*, ako je hermitski i idempotentan* $(A^2 = A)$*;*

(*vi*) unitaran*, ako je* $AA^\dagger = A^\dagger A = I$*; u slučaju realnih prostorâ, koristi se naziv* ortogonalan operator *(*$AA^T = A^T A = I$*).*

Iz definicije je jasno da su sve navedene klase normalni operatori; u sledećem odeljku će biti pokazano da su pozitivni, pa time i statistički operatori hermitski, a nešto kasnije će se ispostaviti da su projektori pozitivni operatori.

Već je ranije pokazano da se elementi matrice koja reprezentuje operator u ortonormiranom bazisu mogu jednostavno naći koristeći skalarni proizvod: $\alpha_{ij} = (x_i, Ax_j)$. Kako je operator potpuno određen bazisom i reprezentacionom matricom, jasno je da se skalarni proizvod može iskoristiti za identifikovanje samih operatora. Zbog kasnijeg korišćenja, naredna lema formuliše najvažnije ovakve stavove.

Lema 2.1 *(i) U prostoru sa skalarnim proizvodom važi da je* $A = 0$ *ako i samo ako je za svaki par vektora* x *i* y *ispunjeno* $(x, Ay) = 0$*.*

(ii) U unitarnom prostoru $V(\mathbb{C})$ *operator* A *je nulti ako i samo ako je* $(x, Ax) = 0$ *za sve* $x \in V$*.*

(iii) U euklidskom prostoru $V(\mathbb{R})$ *simetrični operator* A *je nulti ako i samo ako je* $(x, Ax) = 0$ *za sve* $x \in V$*.*

▬ *Dokaz:* (*i*) A je nulti ako i samo ako mu je reprezentaciona matrica u svakom, pa i u ortonormiranom bazisu jednaka 0. Koristeći izraz $\alpha_{ij} = (x_i, Ax_j)$ za ortonormirani bazis, te hermitsku linearnost skalarnog proizvoda, sledi da je $\mathcal{A}$ jednako nuli ako i samo ako je $(x, Ay) = 0$ za svaki par vektora x i y.
(*ii*) Neophodnost uslova je očigledna. Potrebnost uslova se lako pokazuje pomoću *polarizacionog identiteta*:

$$\alpha^*\beta(x, Ay) + \alpha\beta^*(y, Ax) = ((\alpha x + \beta y), A(\alpha x + \beta y)) - |\, \alpha \,|^2 (x, Ax) - |\, \beta \,|^2 (y, Ay).$$

Pošto je $(x, Ax) = 0$, $\forall x \in V$, leva strana gornje jednakosti je jednaka nuli: $(\alpha^*\beta(x, Ay) + \alpha\beta^*(y, Ax) = 0$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Izbor $\alpha = \beta = 1$, u jednom slučaju i $\alpha = \imath$, $\beta = 1$, u drugom, množenje druge relacije sa $\imath$ i sabiranje dobijenih relacija daje $2(x, Ay) = 0$, $\forall x, y \in V$. Dakle, na osnovu prethodnog stava ove leme $A = 0$.
(*iii*) Neophodnost uslova je očigledna. Neka je $(x, Ax) = 0$, $\forall x \in V$. Tada, za $\alpha = \beta = 1$

[4] U beskonačno dimenzionalnim prostorima pojmove hermitski i autoadjungovan, za operatore čiji domen nije ceo prostor, treba razlikovati!

polarizacioni identitet daje $(x, Ay) + (y, Ax) = 0$ za svako $x, y \in V$, odakle sledi $(x, Ay) = -(y, Ax)$, i dalje, kada se iskoristi simetričnost operatora A i simetričnost skalarnog proizvoda u euklidskom prostoru: $(x, Ay) = -(x, Ay) = 0$ za svako x i y iz V. Pa je prema stavu (i) ove leme $A = 0$. ∎

Treba zapaziti da se prvi stav leme odnosi na sve prostore. Drugi je ograničen samo na unitarne prostore, jer je u dokazu korišćeno množenje vektora skalarom iz $\mathbb{C}$, i ne važi u euklidskom prostoru. Očigledan primer je rotacija ravni za $\pi/2$ (nesingularna, ortogonalna pa i nenulta transformacija) koja svaki vektor x preslikava u vektor ortogonalan na x. Konačno, ekvivalent stava (ii) za euklidske prostore je poslednji iskaz leme 2.1.

Lema 2.1 govori o jednakosti operatora A sa nultim operatorom, ali je njen najveći značaj u identifikaciji operatora, tj. proveri kada su dva operatora jednaka. U tom smislu, na osnovu osobine skalarnog proizvoda da je $(x, Ay) = (x, By)$ ako i samo ako je $(x, (A - B)y) = 0$, ona se najčešće i koristi.

2.4 NORMALNI OPERATORI

Kod vektorskih prostora koji se javljaju u formalizmu različitih fizičkih teorija, uvek postoji definisan skalarni proizvod. Stoga se i operatori koji se koriste, tj. imaju određenu fizičku interpretaciju, mogu klasifikovati u skladu sa tim skalarnim proizvodom, odnosno prema vezi operatora i njegovog adjungovanog. Ispostavlja se da su to praktično uvek normalni operatori (ipak, *kreacioni* i *anihilacioni* operatori, uvedeni u fizici čvrstog stanja i fizici elementarnih čestica nisu ovakvi) i to posebni tipovi definisani u prethodnom odeljku, te će u ovom poglavlju biti razmotrene njihove osobine.

2.4.1 Hermitski operatori

Prema definiciji 2.9, operator $A \in \hat{L}(V(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ je hermitski ako je jednak svom adjungovanom: $A^\dagger = A$. Zbir dva hermitska operatora je opet hermitski operator (posledica stava (i) teorema 2.10). Nulti operator je hermitski. Ako se hermitski operator A pomnoži realnim brojem α opet se dobija hermitski operator $B = \alpha A$ (posledica antilnearnosti operacije adjungovanja). Dakle, hermitski operatori obrazuju vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. To znači da su simetrični operatori potprostor u $\hat{L}(V(\mathbb{R}), V(\mathbb{R}))$.

Zbog osobine $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, proizvod dva hermitska operatora u opštem slučaju nije hermitski operator. Da bi proizvod dva hermitska operatora bio hermitski operator, očigledno je potrebno i dovoljno da oni komutiraju: $[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA = 0$.

Važno je uočiti da je skup hermitskih opearatora određen, ne osobinama inherentnim sâmim operatorima, već njihovim osobinama u odnosu na zadati skalarni proizvod, jer je operacija adjungovanja definisana preko skalarnog proizvoda. Drugim rečima, hermitski operator u odnosu na jedan skalarni proizvod, ne mora biti hermitski u odnosu na drugačije definisan skalarni proizvod u istom prostoru.

Sledeći teorem se odnosi na unitarne prostore. Naime, u euklidskom prostoru $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$ trivijalno ispunjeno, za sve linearne operatore A, tako da se iz realnosti $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ ne može ništa zaključiti o prirodi operatora A.

Teorem 2.11 *Operator $A \in \hat{L}(U,U)$, gde je U konačnodimenzionalan unitarni prostor, je hermitski ako i samo ako je (x, Ax) realan broj za svako x iz U.*

▬ *Dokaz:* Ako je A hermitski, onda je $(x, Ax) = (A^\dagger x, x) = (Ax, x) = (x, Ax)^*$, tj. za svako x iz U je $(x, Ax) = (x, Ax)^* \in \mathbb{R}$. Obratno, ako je $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, onda je $(x, Ax) = (x, Ax)^* = (Ax, x) = (x, A^\dagger x)$, ili $(x, (A - A^\dagger)x) = 0$ za svako x iz U. Na osnovu leme 2.1 (ii), sledi $A - A^\dagger = 0$, tj. $A = A^\dagger$. ▮

Značaj hermitskih operatora u kvantnoj mehanici počiva upravo na ovoj njihovoj osobini. Naime, veličina (x, Ax), gde je x normirani vektor, naziva se *očekivana* ili *srednja* vrednost operatora A u stanju x, i odgovara usrednjenom rezultatu merenja fizičke veličine opisane operatorom A na sistemu u stanju x. Intuitivno prirodan zahtev za realnom vrednošću rezultata merenja, ograničava, na osnovu prethodnog teorema, skup operatora koji opisuju fizičke veličine na hermitske operatore. Na osnovu tzv. postulata o opservablama kvantnog sistema, svaku fizičku veličinu (npr. koordinatu, impuls, energiju, moment impulsa, itd.) predstavlja neki hermitski operator u prostoru stanja $\mathcal{H}$ sistema, i obratno, svaki hermitski operator u $\mathcal{H}$ odgovara nekoj merljivoj fizičkoj veličini.

2.4.2 Projektori

Projektori su idempotentni hermitski operatori (definicija 2.9). Kao što je već rečeno, autoadjungovanost operatora je osobina koja zavisi od uvedenog skalarnog proizvoda u prostoru delovanja operatora. S druge strane, idempotentnost je svojstvo sâmog operatora, što se odražava na geometrijsku strukturu dejstva idempotentnih operatora i projektora[5].

Teorem 2.12 (i) *Svaka dekompozicija prostora $V = W \oplus W^C$ definiše idempotentni operator P_W sa osobinama: $P_W w = w$ za svako w iz W i $P_W w' = 0$ za svako w' iz W^C. Obratno, svaki idempotentni operator P definiše razlaganje $V = R(P) \oplus N(P)$.*

(ii) *Ortogonalne dekompozicije prostorâ su, u smislu prethodnog stava, bijektivno povezane sa projektorima.*

▬ *Dokaz:* (i) Idempotentnost P_W je očigledna. Proverava se direktno, delovanjem na proizvoljan vektor $v \in V$, izražen u formi linearne kombinacije vektora bazisa adaptiranog na datu dekompoziciju. Obratno, neka je $P^2 v = Pv$, za svako v iz V. Tada za svako x iz $R(P)$ postoji y iz V, tako da je $x = Py$, odakle, zbog idempotentnosti operatora P, sledi $Px = P(Py) = Py = x$. Dakle, na vektore iz $R(P)$ operator P deluje kao jedinični operator: ostavlja ih nepromenjenim, pa je $N(P) \cap R(P) = \{0\}$. Uzimajući u obzir i Sylvester-ov zakon defekta, sledi $R(P) \oplus N(P) = V$.
(ii) Prema teoremu 2.10, stav (v), je $N(P)^\perp = R(P^\dagger)$. Kada se uzme u obzir da je projektor P hermitski operator, $P^\dagger = P$, dobija se $N(P)^\perp = R(P)$, odnosno, $N(P) \cap R(P) = \{0\}$, pa po Sylvester-ovom zakonu defekta, sledi $R(P) \oplus N(P) = V$. Obratno, neka je V ortogonalna suma svojih potprostora W i $W^\perp$. Neka je P_W linearan operator na V čije je delovanje definisano relacijama $P_W w = w$, za svako $w \in W$ i $P_W w' = 0$, za svako w' iz $W^\perp$. Tada, za proizvoljne vektore x i y iz prostora V, važe sledeće dve relacije: $(x, P_W y) = (x_w + x'_w, P_W(y_w + y'_w)) = (x_w + x'_w, y_w) = (x_w, y_w)$ i $(x, P_W^\dagger y) = (P_W(x_w + x'_w), y_w + y'_w) = (x_w, y_w + y'_w) = (x_w, y_w)$, odakle

[5] U literaturi se često naziv projektor koristi za idempotentne operatore, dok se idempotentni hermitski operatori nazivaju ortogonalni projektori.

sledi $(x, P_W y) = (x, P_W^\dagger y)$, za svako x i za svako y iz V. Dakle, $P_W = P_W^\dagger$, je hermitski operator. Idempotentnost je očigledna (videti dokaz prethodnog stava), pa je P_W projektor. ∎

Značaj ovog teorema se ogleda u uspostavljanju bijekcije između idempotentnih operatorâ i dekompozicijâ prostora na dva potprostora, odnosno, između projektorâ i ortogonalnih dekompozicijâ. Kako su pri zadatom potprostoru, njegov ortokomplement, a time i ortogonalna dekompozicija prostora, jednoznačno određeni, sledi da su projektori bijektivno povezani sa potprostorima, odnosno da predstavljaju algebarski ekvivalent geometrijskog pojma potprostora. U tom smislu se projektor na potprostor W označava sa P_W.

Matrica $\mathcal{P}$ iz $\mathbb{F}^{nn}$ koja reprezentuje projektor P u ortonormiranom bazisu prostora $V_n(\mathbb{F})$, adaptiranom na dekompoziciju $V = R(P) \oplus N(P)$, ima specifičan oblik, karakterističan za projektore. Ako je m dimenzija potprostora na koji P projektuje vektore iz V, tada će matrica $\mathcal{P}$ imati na dijagonali prvih m jediničnih elemenata, dok će svi ostali elementi matrice $\mathcal{P}$ biti nule. Očigledno, trag ove matrice jednak je dimenziji potprostora $R(P)$. Budući da ni trag matrice (kao ni determinanta) ne zavisi od bazisa reprezentovanja, ~~što će kasnije biti i pokazano~~, važi relacija $\operatorname{Tr} P = \dim R(P)$.

Kako su jedinični i nulti operator reprezentovani jediničnom i nultom matricom, u svim bazisima, tj. dijagonalnim matricama sa jedinicama, odnosno nulama na dijagonali, sledi da su ovi operatori projektori (jedinični operator projektuje na ceo prostor, a nulti projektuje na potprostor $\{0\}$).

Lema 2.2 *Projektor P koji deluje u unitarnom prostoru U ima sledeće osobine:*

(i) $(x, Px) \geq 0$ *za svako x iz U, tj. P je pozitivan operator;*

(ii) $(x, Py) = (Px, y) = (Px, Py)$ *za svako x i y iz U;*

(iii) *P je projektor ako i samo ako je $I_U - P$ projektor;*

(iv) $\| Px \| \leq \| x \|$ *za svako x iz U;* $\| Px \| = \| x \|$ *ako i samo ako $x \in R(P)$.*

∎ *Dokaz:* (i) $(x, Px) = (x, P^2 x) = (Px, Px) = \| Px \|^2 \geq 0$.
(ii) $\underline{(x, Py)} = (x, P^2 y) = \underline{(Px, Py)} = (P^2 x, y) = \underline{(Px, y)}$.
(iii) Ako je P projektor, onda je $(I_U - P)^\dagger = I_U - P$ i $(I_U - P)^2 = I_U - 2P + P^2 = I_U - 2P + P = I_U - P$. Obratno, ako je $I_U - P$ projektor, onda je na osnovu upravo dokazanog stava, $I_U - (I_U - P) = P$, projektor.
(iv) Ako je P projektor, onda iz stavova (i) i (iii), sledi $(x, (I_U - P)x) \geq 0$, za svako x iz U. S druge strane, primenom stava (ii) dobija se: $(x, (I_U - P)x) = ((I_U - P)x, (I_U - P)x) = (x - Px, x - Px) = (x, x) - (Px, x) - (x, Px) + (Px, Px) = \| x \|^2 - (Px, Px) - (Px, Px) + (Px, Px) = \| x \|^2 - \| Px \|^2$. Dakle, iz ove dve relacije sledi $\| x \|^2 - \| Px \|^2 \geq 0$. Ako je x iz $R(P)$, tada je $Px = x$, pa očigledno važi jednakost. ∎

Poslednji stav prethodne leme predstavlja na drugi način formulisanu Bessel-ova nejednakost, teorem 1.5. Naime, projektor na jednodimenzionalni potprostor $L(x)$ obrazovan ortom x je definisan relacijom $P_{L(x)} y = (x, y)x$. Direktna generalizacija je projektor na potprostor obrazovan ortonormiranim skupom $\{x_1, \ldots, x_k\}$: $Py = \sum_{i=1}^{k} (x_i, y) x_i$. Uvrštavanjem ove relacije u izraz $\| Px \|$ poslednjeg stava prethodne leme dobija se Bessel-ova nejednakost.

Svaki normirani vektor $x \in \mathbb{C}^n$ definiše jedan projektor $P_x = x x^\dagger$. Trag ovog projektora se lako nalazi: $\operatorname{Tr} P_x = \operatorname{Tr} x x^\dagger = x^\dagger x = (x, x) = \| x \|^2 = 1$. Dakle, on projektuje na jednodimenzionalni potprostor. Za proizvoljan vektor $y \in \mathbb{C}^n$ važi $P_x y = xx^\dagger y = x(x,y) = (x,y)x$, tj. projektor P_x svakom vektoru pridružuje njegovu projekciju na ort x. Generalizacija na projektor na potprostor obrazovan ortonormiranim skupom $\{x_1,\dots,x_k\}$ je direktna: $P = \sum_{i=1}^k x_i x_i^\dagger$, $Py = \sum_{i=1}^k (x_i,y)x_i$.

U skladu sa gore definisanom bijekcijom između projektorâ koji deluju u prostoru V i potprostorâ prostora V, za dva projektora se kaže da *su ortogonalni* ako su potprostori na koje oni projektuju, tj. njihovi potprostori likova, međusobno ortogonalni.

Lema 2.3 *Projektori P_1 i P_2 su ortogonalni ako i samo ako je $P_1P_2 = 0$.*

▬ *Dokaz:* Neka su P_1 i P_2 ortogonalni. Tada za proizvoljne vektore x i y iz prostora delovanja projektora važi $(x, P_1P_2y) = (P_1x, P_2y) = 0$, jer je $P_1x \in R(P_1)$, a $P_2y \in R(P_2)$, pa sledi $P_1P_2 = 0$. Obratno, neka je $P_1P_2 = 0$. Tada za proizvoljne vektore $x_1 \in R(P_1)$ i $x_2 \in R(P_2)$ važi $(x_1,x_2) = (P_1x_1, P_2x_2) = (x_1, P_1P_2x_2) = (x_1, 0x_2) = 0$, odnosno $R(P_1) \perp R(P_2)$. ▮

Treba zapaziti da iz jednakosti $P_1P_2 = 0$, sledi $P_2P_1 = 0$, što se dobija adjungovanjem i korišćenjem autoadjungovanosti projektorâ. Ovo je još jedna manifestacija simetričnosti relacije ortogonalnosti.

Ako su potprostori likova projektora P_1 i P_2 u odnosu $R(P_1) < R(P_2)$, onda se piše $P_1 < P_2$.

Teorem 2.13 *Neka su P_1 i P_2 projektori.*

(i) *Operator $P_1 + P_2$ je projektor ako i samo ako su P_1 i P_2 ortogonalni i tada je $R(P_1+P_2) = R(P_1) \oplus R(P_2)$.*

(ii) *Operator P_1P_2 je projektor ako i samo ako P_1 i P_2 komutiraju ($[P_1,P_2] = 0$) i tada je $R(P_1P_2) = R(P_1) \cap R(P_2)$.*

(iii) *Operator $P_1 - P_2$ je projektor ako i samo ako je $P_1 > P_2$ i tada je $R(P_1 - P_2)$ ortokomplement potprostora $R(P_2)$ u odnosu na potprostor $R(P_1)$, tj. $R(P_1) = R(P_2) \oplus R(P_1 - P_2)$.*

▬ *Dokaz:* (i) Ako su P_1 i P_2 ortogonalni projektori, tada je $(P_1+P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + 0 + 0 + P_2 = P_1 + P_2$ i $(P_1+P_2)^\dagger = P_1 + P_2$. Dakle, P_1+P_2 je projektor. Za proizvoljan vektor x važi $(P_1+P_2)x = P_1x + P_2x$, tj. svaki vektor $(P_1+P_2)x \in R(P_1+P_2)$ se može izraziti kao suma dva vektora: $P_1x \in R(P_1)$ i $P_2x \in R(P_2)$. Kako su $R(P_1)$ i $R(P_2)$ orotgonalni potprostori, ovo razlaganje je jedinstveno, tj. $R(P_1+P_2) = R(P_1) \oplus R(P_2)$. Obratno, neka je $P_1 + P_2$ projektor. Tada iz $(P_1+P_2)^2 = P_1 + P_2$ sledi $P_1P_2 = -P_2P_1$. Neka je x proizvoljan vektor iz $R(P_2)$. Tada je $y = P_1x = P_1P_2x = -P_2P_1x = -P_2y$, pa je $\| P_2y \|^2 = (P_2y, P_2y) = (y, P_2y) = (y, -y) = -\| y \|^2$, odakle sledi $y = P_1x = 0$, za svako x iz $R(P_2)$. Dakle, $R(P_2) < N(P_1)$. Prema teoremu 2.12, $N(P_1)$ je ortokomplement od $R(P_1)$, pa je $R(P_2) < R(P_1)^\perp$, tj. svaki vektor iz $R(P_2)$ je ortogonalan na svaki vektor iz $R(P_1)$: $R(P_1) \perp R(P_2)$. Dakle, P_1 i P_2 su ortogonalni.
(ii) Ako su P_1 i P_2 projektori koji komutiraju, tada je $(P_1P_2)^\dagger = P_2^\dagger P_1^\dagger = P_2P_1 = P_1P_2$ i $(P_1P_2)^2 = (P_1P_2)(P_1P_2) = P_1(P_2P_1)P_2 = P_1(P_1P_2)P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$, tj. P_1P_2 je projektor. Pri tome vektor x pripada potprostoru $R(P_1P_2)$, tj. $P_1P_2x = P_2P_1x = x$, ako i samo ako $\| P_2x \| = \| x \|$ (jer P_2 mora održati normu, pošto je P_1 neće povećati, odakle je $P_2x = x$) i $\| P_1x \| = \| x \|$, odakle na osnovu stava (iv) leme 2.2, sledi $R(P_1) \cap R(P_2) = R(P_1P_2)$. Obratno, neka je P_1P_2 projektor. Tada je on hermitski operator $(P_1P_2)^\dagger = P_1P_2$. S druge strane, $(P_1P_2)^\dagger = P_2^\dagger P_1^\dagger = P_2P_1$, jer su prema pretpostavci P_1 i P_2 takođe projektori. Dakle,

$P_1P_2 = P_2P_1$. U ovom delu dokaza iskorišćena je samo osobina autoadjungovanosti, pa se može izvesti zaključak da je proizvod dva hermitska operatora hermitski operator ako dati faktori u proizvodu komutiraju.
(*iii*) Lako se proverava da je P projektor (hermitski i idempotentan): $P^\dagger = (P_1 - P_2)^\dagger = P_1^\dagger - P_2^\dagger = P_1 - P_2 = P$; $P^2 = (P_1 - P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 - P_1P_2 - P_2P_1 = P_1 + P_2 - P_2 - P_2 = P_1 - P_2 = P$. Jednakost $P = P_1 - P_2$ ekvivalentna je sa $P_1 = P + P_2$. Pošto je P_1 projektor mora biti $PP_2 = 0$ i $R(P_1) = R(P) \oplus R(P_2)$ (prema stavu (i) ovog teorema), tj. $R(P_1) = R(P_1 - P_2) \oplus R(P_2)$. Obratno, neka je $P = P_1 - P_2$ projektor. Tada je $PP_2 = 0$, $P_2 = P_1 - P$ i $P_2^2 = (P_1 - P)P_2$, odakle sledi $P_2 = P_1P_2 - PP_2 = P_1P_2 - 0 = P_1P_2$. Dalje, za svako x iz $R(P_2)$ važi $x = P_2x = P_1P_2x = P_1x$, tj. ako x pripada potprostoru $R(P_2)$ onda pripada i potprostoru $R(P_1)$, tj. $R(P_2) < R(P_1)$ ili $P_2 < P_1$. ∎

Prvi stav prethodnog teorema se direktno uopštava. Neka su $\{P_1, \ldots, P_k\}$ projektori u unitarnom prostoru U. Operator $P_1 + \ldots + P_k$ je projektor ako i samo ako su svi projektori u sumi međusobno ortogonalni, tj. $P_iP_j = \delta_{ij}P_i$. Tada projektor $P_1 + \ldots + P_k$ projektuje na ortogonalnu sumu potprostora likova projektora u sumi: $R(P_1 + \ldots + P_k) = R(P_1) \oplus \ldots \oplus R(P_k)$.

Definicija 2.10 *Skup nenultih, uzajamno ortogonalnih projektora* $\{P_1, \ldots, P_k\}$ *u unitarnom prostoru* V *naziva se* dekompozicija *ili* razlaganje jedinice, *ako je* $\sum_{i=1}^k P_i = I_V$.

U skladu sa bijektivnom vezom projektora i potprostora, jasno je da dekompozicija jedinice odgovara ortogonalnoj dekompoziciji prostora, i obratno, svaka ortogonalna dekompozicija prostora zadaje odgovarajuću dekompoziciju jedinice: algebarski izraz $I_V = \sum_{i=1}^k P_i$ ima geometrijsku formu $V = \oplus_{i=1}^k R(P_i)$, dok se geometrijsko razlaganje $V = \oplus_{i=1}^k W_i$ operatorski zapisuje kao $I_V = \sum_{i=1}^k P_{W_i}$.

2.4.3 Unitarni i ortogonalni operatori

Transformacije koje ne menjaju metričke odnose među vektorima, odnosno održavaju skalarni proizvod, su deo svakodnevnog iskustva: to su npr. rotacije i refleksije. Njihova generalizacija dovodi do pojma unitarnih i ortogonalnih operatora. Ovakvi operatori reprezentuju različite geometrijske transformacije kako u klasičnoj, tako i u kvantnoj fizici. Otuda i njihova velika primena i u teoriji reprezentacija grupa simetrije fizičkih sistema. U kvantnoj mehanici je operator evolucije sistema unitaran.

Prema definiciji 2.9, stav (vi), operator $A \in \hat{L}(U(\mathbb{F}), U(\mathbb{F}))$ je unitaran (ortogonalan) ako zadovoljava relaciju $AA^\dagger = A^\dagger A = I_U$, odnosno ako je $A^\dagger = A^{-1}$. Dakle, takav operator je invertibilan, pa i nesingularan, te je automorfizam prostora.

Teorem 2.14 *Linearni operator* A *koji deluje u konačnodimenzionalnom unitarnom (euklidskom) prostoru* U *je unitaran (ortogonalan) ako i samo ako važi*

(i) $(Ax, Ay) = (x, y)$ *za svako* x *i* y *iz* U*, tj. ako održava skalarni proizvod;*

(ii) $\| Ax \| = \| x \|$ *za svako* x *iz* U*, tj. ako je* izometrijska *linearna transformacija u* U.

▬ *Dokaz:* (i) Ako je operator A unitaran, tada je $(Ax, Ay) = (A^\dagger Ax, y) = (I_Ux, y) = (x, y)$ za svako $x, y \in U$. Obratno, ako je ispunjeno $(Ax, Ay) = (x, y)$, za svako x i y iz U tada je $(A^\dagger Ax, y) = (I_Ux, y)$ za svako x i y iz U, pa sledi operatorska jednakost $A^\dagger A = I_U$, tj. A je

unitaran operator.
(ii) Ako je A unitaran operator tada je prema prethodnom stavu, $(Ax, Ax) = (x, x)$ za svako $x \in U$, tj. $\| Ax \|^2 = \| x \|^2$ za svako $x \in U$. Obratno, neka je $\| Ax \| = \| x \|$ za svako $x \in U$. Tada je $(x, x) = (Ax, Ax) = (A^\dagger Ax, x)$, tj. $((I_U - A^\dagger A)x, x) = 0$ za svako x iz U. Na osnovu leme 2.1 je $I_U - A^\dagger A = 0$, tj. $I_U = A^\dagger A$. Pošto je operator $I_U - A^\dagger A$ hermitski, ovaj deo dokaza je, u skladu sa stavom (iii) leme 2.1, relevantan i za euklidski prostor, tj. i za ortogonalne operatore.
∎

Direktna posledica ovog teorema je da unitarni (ortogonalni) operatori ne menjaju ortonormiranost, tj. ortonormirani bazis prevode u ortonormirani: $\delta_{ij} = (u_i, u_j) = (Au_i, Au_j)$.

Važno je uočiti da je u konačnodimenzionalnom slučaju dovoljno definisati unitarni (ortogonalni) operator relacijom $A^\dagger A = I_U$, dok je u beskonačnodimenzionalnom slučaju potrebno zahtevati da bude ispunjeno i $A^\dagger A = I_U$ i $AA^\dagger = I_U$, istovremeno. Na primer, ako je $\mathcal{A}$ beskonačnodimenzionalna matrica koja ima svuda nule, a jedinice ispod glavne dijagonale, tada je $\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} = I$, dok je $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger \neq I$, jer se dobija matrica čiji prvi dijagonalni element je nula, a onda slede jedinice na dijagonali (svi ostali elementi su nule).

Lako se pokazuje da su unitarni (ortogonalni) operatori reprezentovani u ortonormiranim bazisima unitarnim (ortogonalnim) matricama. Za takve matrice je karakteristično da su im vrste i kolone ortonormirane. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{nn}$, i neka je $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^{-1}$, tj. $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = I_n$. Poslednja relacija napisana preko matričnih elemenata ima oblik $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk}^* = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Ako se sa R_i označi vrsta $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ matrice $\mathcal{A}$, poslednja relacija se može napisati u obliku $(R_i, R_j) = \delta_{ij}$, gde je $i, j = 1, \ldots, n$. Dakle, vrste $R_i \in \mathbb{C}^{1n}$ matrice $\mathcal{A}$ su ortonormirani vektori u $\mathbb{C}^{1n}$. Slično, polazeći od relacije $\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} = I_n$, pokazuje se da su kolone ortonormirani vektori. Važi i obratno: matrica čije vrste i kolone su ortonormirane je unitarna (ortogonalna).

Pored unitarnih, u kvantnoj mehanici su od zanačaja i *antiunitarni operatori*. To su *antilinearni operatori* $(A(\alpha x + \beta y) = \alpha^* Ax + \beta^* Ay)$ koji ne održavaju skalarni proizvod, nego ga prevode u odgovarajuću kompleksno konjugovanu vrednost: $(Ax, Ay) = (x, y)^*$ za svako x i y iz prostora delovanja operatora. Operator inverzije vremena je antiunitaran.

Ranije je pokazano, teorem 2.10, stav (iv), da ako je potprostor W invarijantan na delovanje operatora A, da je njegov ortokompement invarijantan na delovanje operatora $A^\dagger$. Nesingularnost unitarnih i ortogonalnih operatora ima za posledicu i invarijantnost ortokomplementa:

Teorem 2.15 *Ako je potprostor $W < U$ invarijantan pod delovanjem unitarnog (ortogonalnog) operatora A, tada je i njegov ortokomplement $W^\perp$ invarijantan pod delovanjem operatora A.*

▬ *Dokaz:* Prema teoremu 2.10, stav (iv), iz $AW < W$, sledi $A^\dagger W^\perp < W^\perp$. Pošto je A nesingularan, tj. bijekcija, za njega važi $AW = W$ i $A^\dagger W^\perp = W^\perp$. Množenjem poslednje relacije sleva operatorom A, dobija se $W^\perp = AW^\perp$, jer je $AA^\dagger = I_U$, pošto je A, po pretpostavci, unitaran (ortogonalan) operator. ∎

Korisna posledica ovog teorema je blok dijagonalan oblik matrice koja reprezentuje unitaran ili ortogonalan operator u bazisu adaptiranom na dekompoziciju $U = W \oplus W^\perp$, ako se operator redukuje u potprostoru W.

Budući da su invertibilni i da održavaju skalarni proizvod (pa i normu vektora), unitarni operatori su automorfizmi unitarnog prostora na kom deluju. Skup svih automorfizama neke strukture čini grupu, pa je i skup svih unitarnih operatora u unitarnom prostoru U grupa, u odnosu na operaciju uzastopnog delovanja. Naime, ako je A unitaran, onda postoji $A^{-1} = A^\dagger$ koji je takođe unitaran: $(A^{-1}x, A^{-1}y) = (x', y') = (Ax', Ay') = (AA^{-1}x, AA^{-1}y) = (x, y)$, za svako x i y iz U. Dalje, ako su A i B unitarni, tada je operator AB unitaran: $(ABx, ABy) = (A(Bx), A(By)) = (Bx, By) = (x, y)$, za svako x i y iz U. Množanje operatora je asocijativno. Identični operator I_U je unitaran. Grupa automorfizama unitarnog prostora, tzv. *unitarna grupa*, označava se sa $\mathrm{U}(n)$ i ona je podgrupa opšte linearne grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, čiji elementi su automorfizmi vektorskog prostora, odnosno svi nesingularni operatori. Ako se unitaran operator $A \in \hat{L}(U_n, U_n)$ u proizvoljnom ortonormiranom bazisu unitarnog prostora $U_n(\mathbb{C})$ reprezentuje matricom $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{nn}$, tada skup unitarnih matrica $\{\mathcal{T}^\dagger \mathcal{A} \mathcal{T} \mid \mathcal{T} \in \mathrm{U}(n)\}$ reprezentuje isti operator u svim ortonormiranim bazisima prostora U.

Potpuno analogno, u realnom slučaju, skup ortogonalnih operatora je grupa automorfizama euklidskog prostora, tzv. *ortogonalna grupa*, i ona se označava sa $\mathrm{O}(n)$.

Glava 3

SPEKTRALNA TEORIJA

Linearni operatori na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru $V(\mathbb{F})$ se, izborom bazisa u V, reprezentuju matricama iz $\mathbb{F}^{nn}$. Pri promeni bazisa automorfizmom $T \in \mathrm{GL}(V)$, ova matrica se menja transformacijom sličnosti $\mathcal{T}^{-1} \ldots \mathcal{T}$ (gde je $\mathcal{T} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ odgovarajući automorfizam u $\mathbb{F}^{nn}$). Nalaženje najjednostavnije moguće matrice, tzv. *kanonične forme* operatora je očigledno značajno zbog računskih pogodnosti (posebno kada se kompjuterski radi sa velikim matricama). Kada se tome doda da niz bitnih osobina fizičkih veličina pridruženih operatorima postaje očigledan tek u kanoničnoj formi (glavne ose i vrednosti fizičkih tenzora, mogući rezultati merenja fizičkih veličina, raspodele verovatnoća za pojedina stanja sistema, ekstremalne tačke fizičkih procesa. . .) postaje jasno da je određivanje kanonične forme možda za fiziku najznačajniji deo teorije vektorskih prostora.

3.1 SVOJSTVENI PROBLEM

Intuitivno je jasno da je najjednostavnije računati sa dijagonalnim matricama, kada sve matrične operacije postaju zapravo obične operacije sa skalarima na dijagonali. Stoga je najpogodnije odabrati bazis u kome je matrica operatora dijagonalna. Tako se odmah dolazi do pitanja da li takav bazis postoji, i ako postoji, kako ga odrediti. Ispostavlja se da je to pitanje tesno povezano sa geometrijom dejstva operatora.

3.1.1 Geometrijska slika dijagonalizacije

Neka je V vektorski prostor dimenzije n (ne nužno sa skalarnim proizvodom) nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $V = W_1 \oplus W_2$, pri čemu je $\dim W_1 = n_1$, $\dim W_2 = n_2$ i $n = n_1 + n_2$. Neka je, dalje, A operator iz $\hat{L}(V_n, V_n)$, koji se redukuje u potprostorima W_1 i W_2, tj. $AW_1 < W_1$ i $AW_2 < W_2$. U bazisu $\{w_1^{(1)}, \ldots, w_{n_1}^{(1)}, w_1^{(2)}, \ldots, w_{n_2}^{(2)}\}$, adaptiranom na datu dekompoziciju, prostora V operator A se reprezentuje kvazidijagonalnom matricom $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{nn}$ koja ima na dijagonali kvadratne submatrice dimenzije n_1 i n_2.

Generalizacija je direktna: neka je $V = \oplus_{i=1}^{k \leq n} W_i$ i neka je $AW_i < W_i$ i $\dim W_i = n_i$, za $i = 1, \ldots, k \leq n$, pri čemu je $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. U bazisu $\{w_1^{(1)}, \ldots, w_{n_1}^{(1)}, \ldots, w_1^{(k)}, \ldots, w_{n_k}^{(k)}\}$, adaptiranom na uočenu dekompoziciju prostora V, operator A se reprezentuje kvazidijagonalnom matricom

$\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{nn}$ sa $k \leq n$ kvadratnih submatrica, dimenzije $n_1, \ldots, n_k$, na dijagonali. Ako je $\dim W_i = 1$, za $i = 1, \ldots, k = n$, onda je matrica $\mathcal{A}$, u adaptiranom bazisu, dijagonalna.

Dakle, dijagonalna forma matrice nekog operatora manifestuje postojanje razlaganja prostora, u kome deluje operator, na direktnu sumu jednodimenzionalnih invarijantnih potprostora. Jasno, u svakom od tih potprostora je dejstvo operatora svedeno na množenje vektora odgovarajućom konstantom.

3.1.2 Svojstveni vektor i svojstvena vrednost

Definicija 3.1 *Nenulti vektor $x \in V(\mathbb{F})$ i skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ za koje važi $Ax = \lambda x$, tj. $(A-\lambda I_V)x = 0$, nazivaju se* svojstveni vektor *i* svojstvena vrednost *linearnog operatora $A \in \hat{L}(V, V)$.* Spektar *operatora je skup svih njegovih svojstvenih vrednosti. Skup svih svojstvenih vektora operatora A za svojstvenu vrednost λ, zajedno sa nultim vektorom, tj. skup $V_\lambda = N(A - \lambda I_V)$, naziva se* svojstveni potprostor *za svojstvenu vrednost λ, a za dimenziju svojstvenog potprostora se kaže da je* geometrijski multiplicitet *ili* degeneracija *svojstvene vrednosti λ. Ako je geometrijski multiplicitet veći od 1, kaže se da je svojstvena vrednost* degenerisana*, a ako je jednak 1, da je* nedegenerisana*.*

Važno je uočiti istovremenost definisanja svojstvenog vektora i svojstvene vrednosti operatora: λ je svojstvena vrednost operatora A ako postoji nenulti vektor x za koji je $Ax = \lambda x$, a nenulti vektor x je svojstveni vektor operatora A ako postoji skalar λ za koji je $Ax = \lambda x$.

Odmah se uočava da su svojstveni vektori različitih svojstvenih vrednosti linearno nezavisni: ako je $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ i $Ax' = \lambda' x'$, $x' \neq 0$, gde $\lambda \neq \lambda'$, iz $\alpha x + \beta x' = 0$ sledi $A(\alpha x + \beta x') = \alpha Ax + \beta Ax' = \alpha\lambda x + \beta\lambda' x' = (\lambda - \lambda')\alpha x = 0$, pa je $\alpha = 0$. Slično se nalazi i da je $\beta = 0$. Odavde odmah sledi da linearna kombinacija svojstvenih vektora za različite svojstvene vrednosti nije svojstveni vektor. Kada bi vektor $\alpha x + \beta x'$ bio svojstveni, tj. $A(\alpha x + \beta x') = \lambda''(\alpha x + \beta x')$, tada bi s jedne strane važilo $A(\alpha x + \beta x') = \lambda''\alpha x + \lambda''\beta x'$, a sa druge strane $A(\alpha x + \beta x') = \alpha\lambda x + \beta\lambda' x'$, odakle, zbog linearne nezavisnosti vektora x i x' sledi $\lambda = \lambda''$ i $\lambda' = \lambda''$, pa je $\lambda = \lambda'$, tj. vektori x i x' pripadaju istom svojstvenom potprostoru, suprotno pretpostavci.

U definiciji je za skup svojstvenih vektora za istu svojstvenu vrednost, kome je dodat nulti vektor, upotrebljen naziv potprostor, što se lako opravdava. Naime, ako su x i y dva svojstvena vektora za svojstvenu vrednost λ, tada iz $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \lambda(\alpha x + \beta y)$ sledi da je i svaka linearna kombinacija ovih vektora takođe svojstveni vektor, i to za svojstvenu vrednost λ. Treba naglasiti da nulti vektor po definiciji nije svojstveni, ali pripada svakom svojstvenom potprostoru. U stvari, vektor $x = 0$ zadovoljava uslov $(A - \lambda I_V)x = 0$ za proizvoljno λ. Konačno, geometrijski multiplicitet je defekt operatora $A - \lambda I_V$, tj. $\dim N(A - \lambda I_V)$.

Očigledno je da je jednodimenzionalni potprostor $W < V$ invarijantan pod delovanjem operatora $A \in \hat{L}(V(\mathbb{F}), V(\mathbb{F}))$ ako i samo ako je svaki njegov nenulti vektor svojstven za A. Naime, iz invarijantnosti i jednodimenzionalnosti potprostora W, za svaki njegov nenulti vektor x važi da se dejstvom operatora preslika u kolinearni: $Ax = \lambda x$, pri čemu je, zbog linearnosti operatora, konstanta λ ista za sve vektore iz W. Obratno, ako je $x \neq 0$ svojstveni vektor za A, jasno je i da je svaki njemu kolinearan vektor svojstven za istu svojstvenu vrednost, te je lineal $L(x)$ invarijantan za A. Ovo znači da je svaki pravac (jednodimenzionalni potprostor) u svojstvenom potprostoru invarijantan za A, a lako se pokazuje i da je svaki potprostor svojstvenog potprostora invarijantan.

Po definiciji 3.1, λ je svojstvena vrednost ako i samo postoji nenulti vektor iz nul-potprostora operatora $A-\lambda I$, odnosno ako je ovaj operator singularan. Kao što je već uočeno (§ 2.2.3), to znači da je determinanta matrice koja u bilo kom bazisu reprezentuje operator $A-\lambda I$ jednaka nuli. Činjenica da determinanta operatora ne zavisi od bazisa reprezentovanja, ne samo da pokazuje da je pitanje singularnosti operatora moguće rešiti razmatrajući reprezentativnu matricu u proizvoljnom bazisu, već i da je $\det(A-\lambda I)$ funkcija od λ, koja ne zavisi od bazisa reprezentovanja, pa se može izračunati korišćenjem reprezentativne matrice $\mathcal{A}$ u bilo kom bazisu. Jasno je da je ova funkcija polinom po λ, i to stepena jednakog dimenziji prostora V, i naziva se *svojstveni* ili *karakteristični polinom* operatora A. Sam uslov singularnosti, algebarska jednačina n-tog stepena po λ, $\det(A-\lambda I)=0$ se naziva *svojstvena* (*karakterstična*, *sekularna*) *jednačina* operatora A. Time se dolazi do očigledno ekvivalentne formulacije za definiciju svojstvene vrednosti:

Teorem 3.1 *Skalar λ je svojstvena vrednost linearnog operatora $A \in \hat{L}(V,V)$, ako i samo ako je λ koren svojstvenog polinoma operatora A.*

Teorem daje i način rešavanja *svojstvenog problema*, tj. određivanja svojstvenih vektora i svojstvenih vrednosti zadatog operatora A. Neka je $\{v_1,\dots,v_n\}$ proizvoljni bazis u V. Svaki vektor $x\in V$ se u tom bazisu reprezentuje kolonom $\mathtt{x}=(\xi_1,\dots,\xi_n)^T\in\mathbb{F}^n$, a operator $A\in\hat{L}(V,V)$ matricom $\mathcal{A}=(\alpha_{ij})\in\mathbb{F}^{nn}$. Problem određivanja mogućih vrednosti λ i x u jednačini $(A-\lambda I_V)x=0$, $x\neq 0$, svodi se u reprezentaciji na jednačinu $(\mathcal{A}-\lambda I_n)\mathtt{x}=0$, $\mathtt{x}\neq 0$, tj. sistem od n nelinearnih jednačina sa $n+1$ nepoznatih, $\lambda,\xi_1,\dots,\xi_n$:

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}-\lambda\delta_{ij})\xi_j=0,\quad i=1,\dots,n. \tag{3.1}$$

Kada bi bila poznata vrednost λ, sistem (3.1) bi bio homogen sa n linearnih jednačina i n nepoznatih, te bi netrivijalno, tj. nenulto, rešenje postojalo ako i samo ako je matrica sistema, $\mathcal{A}-\lambda I_n$, singularna (ako nenulti vektor $\mathtt{x}$ prevodi u nulti vektor!). Vrednost determinante je kriterijum singularnosti: ako je svojstvena jednačina $\det(\mathcal{A}-\lambda I_n)=0$, matrica $\mathcal{A}-\lambda I_n$ je singularna. Svaki koren λ' te jednačine, koji je iz $\mathbb{F}$ (proizvod svojstvene vrednosti i svojstvenog vektora je vektor iz prostora $V(\mathbb{F})$, pa svojstvena vrednost mora biti iz $\mathbb{F}$, kako je i u definiciji 3.1 naglašeno) se zameni u sistem (3.1), čime on postaje rešiv po ξ_i, i rešenje $\xi'_1,\dots,\xi'_n$, tj. $x'=\sum_{i=1}^n\xi'_i v_i$, zadovoljava jednačinu $Ax'=\lambda' x'$.

Rešenje λ' svojstvene jednačine može biti višestruko, i ta višestrukost korena karakterističnog polinoma, se naziva *algebarski multiplicitet* svojstvene vrednosti λ'. Treba ga razlikovati od ranije definisanog geometrijskog multipliciteta (dimenzija potprostora $N(A-\lambda I_V)$). Ova dva multipliciteta u opštem slučaju nisu ista: geometrijski multiplicitet svojstvene vrednosti je manji ili najviše jednak algebarskom. Naime, uzimajući linearno nezavisne svojstvene vektore za svojstvenu vrednost λ' u bazis reprezentacije, vidi se da svaki od njih u $\det(\mathcal{A}-\lambda I_n)$ daje faktor $(\lambda'-\lambda)$, te algebarski multiplicitet ne može biti manji od geometrijskog.

Na primer, operator $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ima jednu svojstvenu vrednost $\lambda=0$; iako je njen algebarski multiplicitet 2, ona je nedegenerisana, tj. geometrijski multiplicitet joj je 1, jer je odgovarajući svojstveni potprostor V_0, tj. nulpotprostor operatora, jednak linealu nad vektorom $(1,0)^T$.

Pošto je svojstveni polinom nezavisan od bazisa reprezentovanja, tj. predstavlja invarijantu operatora, isto mora važiti i za svaki njegov stepen, odnosno za koeficijente p_i u polinomu

$\det(A-\lambda I)=\sum_{i=0}^{n}p_i(-\lambda)^{n-i}$. Nije teško pokazati da je p_i suma glavnih minora[1] reda i matrice $\mathcal{A}$. Stoga su i sume glavnih minora reprezentativne matrice i same invarijante operatora, odnosno ne zavise od bazisa reprezentovanja. Dakle, trag (kao suma glavnih minora prvog reda) i determinanta (kao jedini glavni minor reda n) ne zavise od bazisa reprezentovanja i karakteristika su operatora.

Ako za linearni operator A koji deluje u prostoru V_n postoji bazis $X=\{x_1,\dots,x_n\}$, čiji su svi vektori svojstveni za A, tj. ako A ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, kaže se da je operator A *prost*, a da mu je X *svojstveni bazis.* U tom slučaju lineali nad bazisnim (svojstvenim!) vektorima čine dekompoziciju prostora V na jednodimenzionalne invarijantne potprostore, te, u smislu ranije rečenog, reprezentativna matrica postaje dijagonalna.

Teorem 3.2 *Operator $A\in\hat{L}(V_n,V_n)$ može biti reprezentovan dijagonalnom matricom ako i samo ako u V postoji svojstveni bazis operatora A. Tada se na dijagonali te matrice nalaze svojstvene vrednosti koje odgovaraju pojedinim vektorima svojstvenog bazisa.*

▬ *Dokaz:* Neka je $\{x_1,\dots,x_n\}$ svojstveni bazis u $V(\mathbb{F})$. Tada je $Ax_i=\lambda_i x_i$, $i=1,\dots,n$, pri čemu skalari λ_i ne moraju biti međusobno različiti. Prema osnovnoj formuli reprezentovanja, operator A se u ovom bazisu reprezentuje matricom $\mathcal{A}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{F}^{nn}$. Obratno, neka je operator A u bazisu $\{x_1,\dots,x_n\}$ prostora V reprezentovan dijagonalnom matricom $\mathcal{A}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{F}^{nn}$. Za apsolutni bazis $\{e_1,\dots,e_n\}$ u $\mathbb{F}^n$ važi $\mathcal{A}e_i=\lambda_i e_i$, $i=1,\dots,n$. Dakle, bazis reprezentovanja je svojstveni. ▮

Primeri

1. Neka je P projektor u unitarnom prostoru U, dimenzije n, koji definiše ortogonalnu dekompoziciju $U=R(P)\oplus N(P)$. Na vektore iz $R(P)$ projektor deluje kao jedinični operator: $Px=x$, a na vektore iz $N(P)$, kao nulti operator: $Px=0$. Dakle, $R(P)$ je svojstveni potprostor projektora P za svojstvenu vrednost 1, a $N(P)$ je svojstveni potprostor projektora P za svojstvenu vrednost 0. Geometrijski multipliciteti su $\dim R(P)=m\leq n$ i $\dim N(P)=n-m$, respektivno. U bazisu, adaptiranom na uočenu dekompoziciju prostora U, projektor P je reprezentovan dijagonalnom matricom sa prvih m jedinica i preostalih $n-m$ nula na dijagonali.

2. Operator rotacije u $\mathbb{R}^2$ za ugao $\varphi\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, nema niti jedan svojstveni vektor.

3. Operator rotacije u $\mathbb{R}^3$, za ugao φ, oko z ose, ima dva invarijantna potprostora $\mathbb{R}^2$ (xy ravan) i $\mathbb{R}$ (osa rotacije). U prvom nema svojstvenih vektora, izuzev u specijalnom slučaju $\varphi=k\pi$, $k=0,\pm1,\dots$, dok je drugi svojstveni, za svojstvenu vrednost 1.

[1] *Minorom* i-tog reda matrice $\mathcal{A}\in\mathbb{F}^{mn}$ ($i\leq m$, $i\leq n$) naziva se determinanta dobijena iz i^2 elemenata matrice $\mathcal{A}$, koji leže na preseku nekih njenih i kolona i i vrsta. Minor se zove *glavni* ako su redni brojevi odabranih vrsta i kolona isti. Specijalno, sume glavnih minora nultog, prvog, odnosno n-tog reda, matrice tipa $n\times n$ su $p_0\stackrel{\text{def}}{=}1$, $p_1=\operatorname{Tr}\mathcal{A}$, $p_n=\det\mathcal{A}$, respektivno.

3.1.3 Svojstveni problem i komutiranje operatora

U samoj teoriji svojstvenog problema, a posebno u fizičkim primenama, istovremeno rešavanje svojstvenog problema dva operatora se često koristi. Zato će, ostavljajući za trenutak pitanje egzistencije svojstvenog vektora i svojstvenog bazisa, odmah biti navedena

Lema 3.1 *(i)Ako dva operatora komutiraju, svaki svojstveni potprostor jednog operatora je invarijantni potprostor drugog operatora.*

(ii) Ako dva operatora imaju zajednički svojstveni bazis, oni komutiraju.

▬ *Dokaz:* (i) Neka je V_λ jedan svojstveni potprostor operatora A. Za proizvoljni vektor x iz V_λ važi $A(Bx) = BAx = B\lambda x = \lambda(Bx)$. Dakle, Bx je svojstveni vektor operatora A za svojstvenu vrednost λ, te je $Bx \in V_\lambda$ za svako x iz V_λ, što pokazuje da je svojstveni potprostor operatora A invarijantan za B. Na isti način se pokazuje i da su svojstveni potprostori operatora B invarijantni za A.
(ii) Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zajednički svojstveni bazis za A i B, tj. $Ax_i = \alpha_i x_i$ i $Bx_i = \beta_i x_i$. Tada je $(AB)x_i = A\beta_i x_i = \beta_i A x_i = \beta_i \alpha_i x_i = \alpha_i \beta_i x_i = \alpha_i B x_i = B\alpha_i x_i = (BA)x_i$, za svako $i = 1, \ldots, n$, pa je $AB = BA$. ∎

3.2 SVOJSTVENI PROBLEM U KOMPLEKSNOM PROSTORU

Za razliku od realnog, kompleksno polje je algebarski zatvoreno, tj. sadrži sve korene algebarskih jednačina sa kompleksnim koeficijentima. Stoga se odgovori na pitanja egzistencije svojstvenih vrednosti, vektora i bazisa razlikuju za kompleksne i za realne prostore.

3.2.1 Egzistencija svojstvenog vektora

Iz algebarske zatvorenosti polja $\mathbb{C}$, tzv. osnovni teorem algebre, neposredno sledi da svaki operator ima bar jednu svojstvenu vrednost i odgovarajući svojstveni vektor.

Teorem 3.3 *Svaki linearni operator u kompleksnom vektorskom prostoru ima bar jednu svojstvenu vrednost i bar jedan odgovarajući svojstveni vektor, tj. bar jedan jednodimenzionalni invarijantni potprostor.*

▬ *Dokaz:* Kako karakteristični polinom ima bar jedan koren, λ', za vrednost $\lambda = \lambda'$ sistem (3.1) je rešiv i njegovo rešenje daje svojstveni vektor x'. ∎

Važno je uočiti da se teorem može primeniti u svakom invarijantnom potprostoru operatora. Za odgovarajuće redukovane operatore, teorem pokazuje da u svakom invarijantnom potprostoru, operator A ima bar jedan svojstveni vektor.

Koristeći prethodni stav i lemu 3.1 pokazuje se

Lema 3.2 *Dva operatora koji komutiraju imaju bar jedan zajednički svojstveni vektor.*

▬ *Dokaz:* Teorem 3.3 garantuje postojanje bar jednog svojstvenog potprostora V_α, operatora A. Pomenuta posledica istog teorema, te invarijantnost V_α za B (lema 3.1, stav (i)) znače da u V_α i B ima bar jedan svojstveni vektor (neka je to x, a β je odgovarajuća svojstvena vrednost); taj vektor je istovremeno svojstveni i za A i za B. ∎

3.2.2 Ortonormirani svojstveni bazis

U vektorskim prostorima koji se javljaju u fizici uvek je definisan neki skalarni proizvod, pa su i najčešće korišćeni bazisi upravo ortonormirani svojstveni bazisi pojedinih relevantnih operatora. Stoga je potrebno odrediti za kakve operatore takvi bazisi postoje. Pokazuje se da su normalni operatori najšira klasa operatora u konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima sa takvim svojstvom.

Teorem 3.4 *Za linearni operator A na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V postoji ortonormirani svojstveni bazis ako i samo ako je A normalni operator.*

▬ *Dokaz:* Neka postoji svojstveni bazis operatora A u kom je on reprezentovan dijagonalnom matricom $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{nn}$. U istom bazisu (pošto je ortonormiran) i adjungovani operator je reprezentovan dijagonalnom matricom $\mathcal{A}^\dagger$, te je bazis svojstven i za $A^\dagger$, tj. zajednički je svojstveni bazis za A i $A^\dagger$. Stoga ovi operatori komutiraju, prema lemi 3.1, stav (ii).
Obratno, neka je A normalni operator: $[A, A^\dagger] = 0$. Prema lemi 3.2 operatori A i $A^\dagger$ imaju bar jedan zajednički svojstveni vektor v_1. Lineal $L(v_1)$ je jednodimenzionalni zajednički svojstveni potprostor, pa zato i invarijantni, za A i $A^\dagger$. Prema teoremu 2.10, stav (iv), i ortokomplement $L(v_1)^\perp$ je invarijantan i za A i za $A^\dagger$, pa za redukovane operatore $A_{L(v_1)^\perp}$ i $A^\dagger_{L(v_1)^\perp}$ na $L(v_1)^\perp$, ponovo važi lema 3.2 i postoji zajednički svojstveni vektor v_2. Čitav postupak se može ponavljati sve dok se ne nađe $n = \dim V$ ortogonalnih zajedničkih svojstvenih vektora v_i, koji normiranjem postaju traženi ortonormiran svojstveni bazis. ▮

Neposredna posledica teorema je da su svojstveni potprostori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrednostima normalnog operatora u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru uzajamno ortogonalni i u ortogonalnoj sumi daju ceo prostor. Ako je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ $(k \leq n)$ spektar normalnog operatora A, odgovarajući svojstveni potprostori su $V_{\lambda_i} = \oplus_{j=1}^{n_i} L(v_j^{(i)})$, gde je $Av_j^{(i)} = \lambda_i v_j^{(i)}$ $(j = 1, \dots, n_i = \dim V_{\lambda_i})$. Ceo prostor je ortogonalna suma ovih svojstvenih potprostora, $V = \oplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$, čime se dobija *svojstvena dekompozicija prostora*, određena delovanjem normalnog operatora A.

Svaka ortogonalana dekompozicija unitarnog prostora određuje bijektivno jedno razlaganje jedinice na projektore (teorem 2.12, stav (ii)). Tako svojstvena dekompozicija prostora, pomoću *svojstvenih projektora* P_λ na svojstvene potprostore V_λ (tj. P_λ je definisan oblašću likova $R(P_\lambda) = V_\lambda$), određuje *svojstvenu dekompoziciju jedinice* indukovanu datim normalnim operatorom: $I_V = \sum_{i=1}^k P_{\lambda_i}$. Pri tome se ortogonalnost svojstvenih potprostora manifestuje kao ortogonalnost projektora: $P_{\lambda_i} P_{\lambda_j} = \delta_{ij} P_{\lambda_i}$. Istovremeno, svaki vektor $x \in V$ se može razložiti na komponente iz svojstvenih potprostora, $x = \sum_{i=1}^k P_{\lambda_i} x$; kako u svakom svojstvenom potprostoru operator deluje kao skalarni operator, množeći vektore svojstvenom vrednošću, za proizvoljni vektor x je $Ax = \sum_{i=1}^k A(P_{\lambda_i} x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_{\lambda_i} x$. Prema tome, važi i operatorska jednakost:

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i}, \tag{3.2}$$

tzv. *spektralna forma* operatora A.

Konačno, primenjujući leme 3.1 i 3.2 na dva operatora koji komutiraju, lako se pokazuje da važi

Teorem 3.5 *Dva normalna operatora komutiraju ako i samo ako imaju zajednički svojstveni bazis.*

3.2.3 Spektralna karakterizacija normalnih operatora

Teorem 3.6 *Normalni operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru je (1) hermitski, (2) pozitivan, (3) strogo pozitivan, (4) unitaran, (5) invertibilan, (6) projektor ako i samo ako su mu sve svojstvene vrednosti (1') realne, (2') pozitivne, (3') strogo pozitivne, (4') apsolutne vrednosti jedan, (5') nenulte, (6') jednake jedinici ili nuli.*

▬ *Dokaz:* (1) $\Rightarrow$ (1′): Prema teoremu 2.11, operator A je hermitski ako i samo ako je $(x, Ax) \in \mathbb{R}$, za svako x. Za normirani svojstveni vektor y hermitskog operatora A ($Ay = \lambda y$) važi: $(y, Ay) = (y, \lambda y) = \lambda(y, y) = \lambda\| \, y \, \|^2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
(2) $\Rightarrow$ (2′) i (3) $\Rightarrow$ (3′): Prema definiciji 2.9 (iii), operator A je pozitivan ako je $(x, Ax) \geq 0$, za svako x, a strogo pozitivan ako je $(x, Ax) > 0$ za svako nenulto x, pa je za normirani svojstveni vektor y pozitivnog, odnosno strogo pozitivnog, operatora A ispunjeno $(y, Ay) = (y, \lambda y) = \lambda \geq 0$, odnosno $\lambda > 0$.
(4) $\Rightarrow$ (4′): Prema teoremu 2.14, stav (i), operator A je unitaran ako i samo ako je $(Ax, Ay) = (x, y)$ za svako x i y. Specijalno, za normirani svojstveni vektor x operatora A važi $1 = (x, x) = (Ax, Ax) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^* \lambda(x, x) = |\lambda|^2$, pa je $|\lambda| = 1$, tj. spektar unitarnog operatora je na jedničnom krugu: $\lambda = e^{\imath\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
(5) $\Rightarrow$ (5′): Ako je operator A invertibilan i $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, tada je $x = A^{-1}Ax = \lambda(A^{-1}x)$, pa je $\lambda \neq 0$.
(6) $\Rightarrow$ (6′): Ako je A idempotentan operator i $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, onda je $\lambda x = Ax = A^2x = \lambda^2 x$, pa je $(\lambda - \lambda^2)x = 0$, tj. $\lambda = \lambda^2$. Ova relacija je zadovoljena samo za $\lambda = 0$ ili za $\lambda = 1$.
Neka je $\sum_i \lambda_i P_i$ spektralna forma operatora A. Tada je $A^\dagger = \sum_i \lambda_i^* P_i$, pa je očigledno da iz (1′) sledi (1). Pošto je $(x, Ax) = (x, \sum_i \lambda_i P_i x) = \sum_i \lambda_i (x, P_i x) = \sum_i \lambda_i (P_i x, P_i x) = \sum_i \lambda_i \| \, P_i x \, \|^2$, vidi se da iz (2') sledi (2). Ako je $\lambda_i > 0$ za svako i i ako je $(x, Ax) = 0$, tada mora biti $P_i x = 0$ za svako i, pa je $x = \sum_i P_i x = 0$, čime je pokazano da iz (3') sledi (3). Implikacija (4′) $\Rightarrow$ (4) sledi iz relacije $I_V = A^\dagger A = \sum_i |\lambda_i|^2 P_i$. Ako je $\lambda_i \neq 0$ za svako i, može se formirati linearni operator $B = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} P_i$. Kako je $AB = BA = I_V$, sledi da (5') implicira (5). Konačno, na osnovu $A^2 = \sum_i \lambda_i^2 P_i$ zaključuje se da iz (6') sledi (6). ∎

Može se zapaziti da na osnovu implikacija (5) $\Rightarrow$ (5'), (2) $\Rightarrow$ (2') i (3) $\Rightarrow$ (3') sledi, da ako je operator A pozitivan i invertibilan, da je onda strogo pozitivan. Takođe, nije teško zaključiti da, ako je operator A pozitivan i ako je zbir svih njegovih svojstvenih vrednosti jednak jedinici, da je on statistički.

Na osnovu teorema 3.6 pojedine klase linearnih operatora mogu se shvatiti kao generalizacije različitih podskupova kompleksnih brojeva, a adjungovanje kao operacija analogna konjugovanju. Kao što se svaki kompleksan broj z može napisati u obliku $z = \mathrm{Re}\, z + \imath \mathrm{Im}\, z$, gde su $\mathrm{Re}\, z$ i $\mathrm{Im}\, z$ realni brojevi, tako se i proizvoljni linearni operator A može napisati u obliku $A = B + \imath C$, gde su $B = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ i $C = \frac{1}{2\imath}(A - A^\dagger)$ hermitski operatori. Za normalne operatore je $BC = CB$. Važi i obratno: ako je $BC = CB$, onda je $AA^\dagger = A^\dagger A$, tj. operator A je normalan. Kao što je $zz^* = |z|^2$ pozitivan realan broj za svako $z \in \mathbb{C}$, tako su i operatori $AA^\dagger$ i $A^\dagger A$ pozitivni (time i hermitski), za svaki linearni operator A. Podpolje realnih brojeva određeno je relacijom $z^* = z$, dok za hermitske operatore važi $A^\dagger = A$. Jednačinu $zz^* = 1$ zadovoljavaju brojevi sa jedinične kružnice $z = e^{\imath\varphi}$, a unitarni operatori su definisani relacijom $AA^\dagger = I$. Konačno, kao što se svaki kompleksan broj z može napisati u Euler-ovoj formi: $z = \rho e^{\imath\varphi}$ ($\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$) i svaki operator A se može napisati u obliku $A = Pe^{\imath H}$, gde je P pozitivan, a H hermitski operator, što će za normalne operatore biti pokazano u sledećem odeljku.

Svojstveni problem Pauli-jevih matrica

Ranije uvedene Pauli-jeve matrice ($\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) koje deluju u unitarnom prostoru $\mathbb{C}^2$, u kvantnoj mehanici imaju ulogu generatora rotacija u tzv. spinskom prostoru. Kako su istovremeno i hermitske $\sigma_i = \sigma_i^\dagger$ i unitarne $\sigma_i^\dagger = \sigma_i^{-1}$, važi $\sigma_i^2 = I_2$, gde je $i = x, y, z$, a njihove svojstvene vrednosti mogu biti samo ± 1. Ispostavlja se da svaka od ovih matrica ima obe ove svojstvene vrednosti, jer je $\det \sigma_i = -1$ za $i = x, y, z$. Odgovarajući ortonormirani svojstveni bazisi se lako nalaze rešavanjem svojstvenog problema $\sigma_i e^i_\pm = \pm e^i_\pm$. Dakle, $\{e^x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T, e^x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T\}$, $\{e^y_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\imath)^T, e^y_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-\imath)^T\}$ i $\{e^z_+ = (1,0)^T, e^z_- = (0,1)^T\}$. Odgovarajuće spektralne forme su $\sigma_i = P^i_+ - P^i_-$, gde su $P^i_\pm = e^i_\pm (e^i_\pm)^\dagger$, svojstveni projektori za svojstvene vrednosti ± 1, tj. $\sigma_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}$ i $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kao što se vidi, Pauli-jeve matrice nemaju zajednički svojstveni bazis, pa i ne komutiraju međusobno. Naime, važi $[\sigma_i, \sigma_j] = \epsilon_{ijk}\sigma_k$, gde je ϵ_{ijk} *tenzor Levi–Civita-e*:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ako su } i,j,k \text{ parna (ciklična) permutacija brojeva 1, 2 i 3,} \\ -1 & \text{ako su } i,j,k \text{ neparna (anticiklična) permutacija brojeva 1, 2 i 3,} \\ 0 & \text{za ostale izbore indeksa } i,j,k = 1,2,3. \end{cases}$$

3.2.4 Funkcije normalnih operatora

Pošto je većina fizičkih veličina funkcija nekih osnovnih veličina, isti slučaj mora biti i sa operatorima koji ih opisuju. Stoga je neophodno uvesti pojam funkcije operatora. To je posebno jednostavno u slučaju normalnih operatora. Naime, za njih je uvek moguće naći spektralnu formu, a u tom obliku se funkcija operatora svodi na istu takvu funkciju svojstvenih vrednosti.

Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitička funkcija (način razmatranja funkcija sa singularitetima je nešto komplikovaniji, mada predstavlja direktno uopštenje metoda koji će biti izložen, uz uračunavanje radijusa konvergencije). Tada se f može razviti u svuda konvergentni Taylor-ov red: $f(\zeta) = \sum_{k=0}^\infty c_k \zeta^k$. *Funkcija operatora* $f : \hat{L}(V,V) \to \hat{L}(V,V)$ se definiše koristeći ovaj razvoj: $f(A) = \sum_{k=0}^\infty c_k A^k$.

Teorem 3.7 *Ako je A normalni operator sa spektralnom formom $A = \sum_i^\sigma \lambda_i P_i$, tada je $f(A)$ normalni operator sa spektralnom formom $f(A) = \sum_i^\sigma f(\lambda_i) P_i$.*

▬ *Dokaz:* Ako se uoči da je $A^k = (\sum_i \lambda_i P_i)^k = \sum_i \lambda_i^k P_i$ (jer je $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$), jasno je da je $f(A) = \sum_{k=0}^\infty \sum_i c_k \lambda_i^k P_i = \sum_i (\sum_{k=0}^\infty c_k \lambda_i^k) P_i = \sum_i f(\lambda_i) P_i$. ∎

Prethodni stav se može uzeti i za alternativnu definiciju funkcije normalnog operatora preko njegove spektralne forme. Naime, ako je A normalni operator sa spektralnom formom $\sum_i \lambda_i P_i$ i ako je f proizvoljna funkcija sa vrednostima u polju $\mathbb{C}$, definisana bar u tačkama λ_i, tada se $f(A)$ zadaje relacijom $f(A) = \sum_i f(\lambda_i) P_{\lambda_i}$.

Alternativna definicija operatorske funkcije normalnog operatora omogućava da se, umesto sumiranja reda $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, ista funkcija dobije izračunavanjem konačne sume $\sum_{i=1}^{\sigma} f(\lambda_k) P_{\lambda_k}$. Jasno je da sumiranje reda nije uvek lako, pa ni izvodljivo, te time spektralna forma i osobina operatorskih funkcija normalnih operatora dobijaju na praktičnom značaju.

Primeri

1. Ako je karakteristična funkcija podskupa S skupa kompleksnih brojeva definisana sa

$$\chi_S(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{za } \zeta \notin S \\ 1 & \text{za } \zeta \in S \end{cases},$$

   tada je za normalni operator A funkcija $\chi_S(A) = \sum_i \chi_S(\lambda_i) P_i = \sum_{i,\ \lambda_i \in S} P_i$, projektor na ortogonalni zbir svojstvenih potprostora za svojstvene vrednosti iz S, tzv. *projektorska mera* podskupa S za operator A. Specijalno, ako je $S = \{\lambda_i\}$, tada je $\chi_{\lambda_i}(A) = P_i$, tj. projektor na potprostor rešenja svojstvenog problema $Ax = \lambda_i x$.

2. Ako je $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, tada je (pretpostavlja se, naravno, da je f definisano za svako λ_i, tj. $\lambda_i \neq 0$, te je A invertibilan) $f(A) = A^{-1}$, a ako je $f(\zeta) = \zeta^*$, tada je $f(A) = A^\dagger$. Dakle, može se zaključiti da ako je f proizvoljna racionalna funkcija od ζ i ζ^*, $f(A)$ se dobija smenama: $\zeta \to A$, $\zeta^* \to A^\dagger$ i (za invertibilne operatore) $\zeta^{-1} \to A^{-1}$.

3. Često korišćena eksponencijalna funkcija pruža mogućnost za povezivanje hermitskih i unitarnih operatora. Ako je H hermitski operator, njegova spektralna forma je $H = \sum_i \lambda_i P_i$, pri čemu su sve svojstvene vrednosti λ_i realne. Tada su sve svojstvene vrednosti operatora $U = e^{\imath H} = \sum_i e^{\imath \lambda_i} P_i$, modula jedan, te je U unitaran. Drugim rečima, svakom hermitskom operatoru odgovara jedan unitarni. Ovo je formalno opravdanje izuzetno značajne i redovno upotrebljavane korespodencije među geometrijskim transformacijama (unitarni operatori) i fizičkim veličinama (hermitski operatori) u kvantnoj fizici. U suprotnom smeru veza nije jednoznačna. Naime, unitarnom operatoru U pored operatora H odgovaraju i hermitski operatori čije se svojstvene vrednosti razlikuju za $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) od odgovarajućih svojstvenih vrednosti operatora H. Slično, za svaki hermitski operator H, njegova funkcija e^H je pozitivni, a $\frac{e^H}{\operatorname{Tr} e^H}$ statistički operator, koji ima posebno mesto u opisu ravnotežnih stanja u statističkoj fizici.

4. Svaka svojstvena vrednost normalnog operatora A se može izraziti u Euler-ovoj formi $\lambda_i = \rho_i e^{\imath \varphi_i}$ ($\rho_i \geq 0$, $\varphi_i \in \mathbb{R}$). Treba uočiti da iako su sve svojstvene vrednosti λ_i međusobno različite, neki među brojevima ρ_i mogu biti jednaki, a isto važi i za brojeve φ_i. Koristeći ortogonalnost svojstvenih projektora, spektralna forma se može napisati kao $A = (\sum_i \rho_i P_i)(\sum_j e^{\imath \varphi_j} P_j)$. Sabirajući projektore uz iste ρ_i u prvoj zagradi, odnosno iste φ_j u drugoj, nalazi se $A = (\sum_s \rho_s P'_s)(\sum_t e^{\imath \varphi_t} P''_t)$ (s i t prebrojavaju samo različite ρ_i, odnosno φ_j). Konačno, zaključuje se da je $A = PU$, gde je P pozitivan operator sa spektralnom formom $\sum_s \rho_s P'_s$, a U unitarni operator, čija je spektralna forma $\sum_t e^{\imath \varphi_t} P''_t$. Tako je dobijena *polarna forma* normalnog operatora. Kako su svojstveni potprostori operatora A potprostori svojstvenih potprostora kako operatora P, tako i operatora U, svaki svojstveni bazis za A je zajednički svojstveni bazis za P i U, te oni komutiraju. Konačno, ukoliko je

operator A singularan, jedna svojstvena vrednost, λ_0, jednaka je 0; sledi da je i $\rho_0 = 0$, ali je odgovarajuće φ_0 neodređeno, i može se uzeti bilo koji broj. Stoga je jasno da je unitarni deo polarne forme jednoznačno određen ako je operator A nesingularan.

Operator rotacija u spinskom prostoru kao funkcija Pauli-jevih matrica

Unitarni operator, koji u spinskom prostoru jedne čestice (unitarni prostor $\mathbb{C}^2$) reprezentuje rotacije $R_{\vec{u}}(\varphi)$ (oko orta $\vec{u}$ za ugao φ) u običnom prostoru, generisan je Pauli-jevim matricama (hermitskim i unitarnim !) i u tzv. standardnom bazisu spinskog prostora dat je izrazom: $U_s(\varphi\vec{u}) = e^{-\frac{\imath}{2}\varphi\vec{u}\vec{\sigma}}$, gde je $\vec{u}\vec{\sigma} = u_x\sigma_x + u_y\sigma_y + u_z\sigma_z = \sigma_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} u_z & u_x - \imath u_y \\ u_x + \imath u_y & -u_z \end{pmatrix}$. Operator $\sigma_{\vec{u}}$ je očigledno hermitski ($\sigma_{\vec{u}} = \sigma_{\vec{u}}^\dagger$) i unitaran ($\sigma_{\vec{u}}^2 = \parallel \vec{u} \parallel I_2 = I_2 \Rightarrow \sigma_{\vec{u}} = \sigma_{\vec{u}}^{-1}$) pa su ± 1 jedine moguće svojstvene vrednosti. Kako je $\det \sigma_{\vec{u}} = -\parallel \vec{u} \parallel = -1$, spektar operatora $\sigma_{\vec{u}}$ je $\{1, -1\}$. Odgovarajući svojstveni vektori ($\sigma_{\vec{u}} e_\pm = \pm e_\pm$) su: $e_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1+u_z)}}(1 + u_z, u_x + \imath u_y)^T$ i $e_- = \frac{1}{\sqrt{2(1-u_z)}}(1 - u_z, -u_x - \imath u_y)^T$, pa je $P_+ - P_-$ spektralna forma ovog operatora, dok je $e^{-\imath\frac{\varphi}{2}}P_+ + e^{\imath\frac{\varphi}{2}}P_-$ spektralna forma odgovarajućeg operatora rotacije $U_s(\varphi\vec{u})$, gde su $P_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + u_z & u_x - \imath u_y \\ u_x + \imath u_y & \frac{u_x^2+u_y^2}{1+u_z} \end{pmatrix}$ i $P_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - u_z & -u_x + \imath u_y \\ -u_x - \imath u_y & \frac{u_x^2+u_y^2}{1-u_z} \end{pmatrix}$ odgovarajući spektralni projektori. Iz spektralne forme se dalje lako nalazi da je $U_s(\varphi\vec{u}) = \cos\frac{\varphi}{2} I_2 - \imath \sin\frac{\varphi}{2}\sigma_{\vec{u}}$.

Specijalno, za rotacije oko z ose nalazi se (na osnovu očigledne spektralne forme operatora $\sigma_z = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) $U_s(\varphi\vec{e_z}) = e^{-\frac{\imath}{2}\varphi}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{\frac{\imath}{2}\varphi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tj. $U_s(\varphi\vec{e_z}) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\imath}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\imath}{2}\varphi} \end{pmatrix}$.

U oba data slučaja, rezultat se mogao dobiti i direktno, iz razvoja u red, a bez primene spektralne forme: $e^{-\frac{\imath}{2}\varphi\sigma_z} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(\frac{-\imath}{2}\varphi\sigma_z)^n = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!}(\frac{\varphi}{2})^{2k} I_2 - \imath\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\frac{\varphi}{2})^{2k+1}\sigma_z = \cos\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \imath\sin\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} - \imath\sin\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\varphi}{2} + \imath\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\imath}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\imath}{2}\varphi} \end{pmatrix}$. Slično, se nalazi i $U_s(\varphi\vec{u})$, imajući u vidu da je $\sigma_{\vec{u}}^{2k} = I_2$ i $\sigma_{\vec{u}}^{2k+1} = \sigma_{\vec{u}}$.

3.3 SVOJSTVENI PROBLEM U REALNOM PROSTORU

3.3.1 Egzistencija svojstvenog vektora

Polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno, pa rešenje svojstvene jednačine operatora koji deluje na realnom prostoru može biti kompleksan broj, koji, po definiciji, nije svojstvena vrednost u ovom slučaju. Posledica ovoga je da teorem 3.3 ne važi u realnom prostoru, a njegov analogon je:

Teorem 3.8 *Svaki operator A na realnom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V ima bar jedan invarijantni potprostor dimezije jedan (svojstveni pravac) ili dva (invarijantna ravan).*

▬ *Dokaz:* Neka je $\{v_1, \dots, v_n\}$ bazis u V i neka su operator A i vektor z reprezentovani u tom bazisu matricom $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{nn}$ i kolonom $\mathsf{z} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T \in \mathbb{R}^n$, respektivno. Svojstveni

problem operatora A, u ovoj reprezentaciji, napisan preko matričnih elemenata ima oblik (3.1). Karakteristična jednačina, $\det(\mathcal{A} - \lambda I_n) = 0$, je jednačina n-tog stepena po λ sa realnim koeficijentima. Stoga koren λ_0 te jednačine može biti realan ili kompleksan, i ti slučajevi se moraju posebno razmotriti.
(a) Koren λ_0 je realan, te postoji nenulto rešenje, $\zeta_1^0, \ldots, \zeta_n^0$, sistema (3.1); svi ζ_i^0 su realni, i $z^0 = \sum_{i=1}^n \zeta_i^0 v_i \neq 0$ je svojstveni vektor operatora A (tj. $Az^0 = \lambda_0 z^0$), što znači da je $L(z^0)$ jednodimenzionalni invarijantni potprostor operatora A.
(b) Koren $\lambda_0 = a + \imath b$ je kompleksan ($a, b \in \mathbb{R}$ su njegov realni i imaginarni deo), te postoji nenulto, ali kompleksno, rešenje, $\xi_1^0 + \imath\eta_1^0, \ldots, \xi_n^0 + \imath\eta_n^0$, sistema (3.1). Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela, iz (3.1) dobija se:

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} - a\delta_{ij})\xi_j^0 = -b\eta_i^0, \quad \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} - a\delta_{ij})\eta_j^0 = b\xi_i^0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Gornje relacije se mogu napisati u matričnom obliku $(\mathcal{A} - aI_n)\mathtt{x} = -b\mathtt{y}$ i $(\mathcal{A} - aI_n)\mathtt{y} = b\mathtt{x}$, gde su $\mathtt{x} = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ i $\mathtt{y} = (\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$. Kolone $\mathtt{x}$ i $\mathtt{y}$ reprezentuju u datom bazisu neke vektore, x i y, iz V, te je (3.3) reprezentacija relacija $Ax = ax - by$ i $Ay = bx + ay$. Vidi se da je potprostor (ravan) obrazovan vektorima x i y invarijantan pod delovanjem operatora A. ∎

Direktna posledica ovog teorema je da u realnom vektorskom prostoru neparne dimenzije svaki linearni operator ima bar jedan jednodimenzionalni invarijantni potprostor. Specijalno, za $n = 3$, karakteristična jednačina $\det(A - \lambda I_3) = \lambda^3 - p_1\lambda^2 + p_2\lambda - p_3 = 0$, gde je $p_1 = \operatorname{Tr} A$, a $p_3 = \det A$, je kubna, sa realnim koeficijentima i može imati ili sva tri realna rešenja ili jedno realno i dva kompleksno konjugovana.

3.3.2 Spektralni teorem u euklidskom prostoru

Dok su unitarni prostori važni za kvantnu fiziku, klasična fizika koristi prevashodno euklidske prostore. Analogoni hermitskih i unitarnih operatora su simetrični ($A^T = A$) i ortogonalni ($A^T A = AA^T = I$) operatori, respektivno. Dok i hermitski i unitarni operatori, kao podklase normalnih operatora u unitarnim prostorima, imaju svojstveni ortonormirani bazis, analogija u euklidskim prostorima nije potpuna. Naime, samo simetrični operatori uvek imaju ortonormiran svojstveni bazis, što će biti pokazano u ovom odeljku.

Lema 3.3 (i) *Koreni svojstvenog polinoma simetričnog operatora su realni.*

(ii) *Za simetrični operator postoji bar jedan jednodimenzionalni invarijantni potprostor, tj. bar jedan svojstveni vektor.*

▬ *Dokaz:* (i) Ako je koren λ svojstvenog polinoma operatora $A \in \hat{L}(V, V)$ bio kompleksan, $\lambda = a + \imath b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), prema teoremu 3.8 (drugi slučaj u dokazu) je $Ax = ax - by$ i $Ay = bx + ay$, gde su x i y nenulti vektori iz V. No, za simetrični operator A važi $(Ax, y) = (x, Ay)$, te je $a(x, y) - b(y, y) = b(x, x) + a(x, y)$, odnosno $b(\| x \|^2 + \| y \|^2) = 0$. Konačno, $\| x \|^2 + \| y \|^2$ je različito od 0 ($x, y \neq 0$) i mora biti $b = 0$. Dakle, $\lambda = a \in \mathbb{R}$ je svojstvena vrednost operatora A.
(ii) Odavde odmah sledi, kao u prvom slučaju u dokazu teorema 3.8, da postoji i svojstveni vektor z^0 za tu svojstvenu vrednost: $Az^0 = az^0$. ∎

Direktna posledica ove leme je da će simetrični operator A imati bar jedan svojstveni vektor u svakom invarijantnom potprostoru $W < V$.

Najšira klasa operatora u euklidskom prostoru sa ortonormiranim svojstvenim bazisom su simetrični operatori. O tome govori sledeći

Teorem 3.9 *Za linearni operator A na konačnodimenzionalnom euklidskom prostoru V_n postoji ortonormirani svojstveni bazis ako i samo ako je A simetričan operator.*

▬ *Dokaz:* Uz korišćenje leme 3.3, dokaz je potpuno analogan dokazu teorema 3.4. ∎

Takođe, sve što je rečeno o spektralnoj formi normalnih operatora u unitarnom prostoru, odnosi se i na simetrične operatore.

3.3.3 Ortogonalni operatori

Za razliku od kompleksnih prostora, kada je svaki normalni operator, time i svaki unitarni, imao ortonormirani svojstveni bazis, u realnim prostorima je takva osobina obezbeđena samo za simetrične, ali ne i za ortogonalne operatore (definicija 2.9 (vi)). Naravno, neki među njima, kao npr. jedinični, su istovremeno i simetrični, te za njih postoji ortonormirani svojstveni bazis, ali u opštem slučaju, oni ne moraju imati svojstveni bazis, pa čak ni svojstvene vektore, ni svojstvene vrednosti. Takav primer su rotacije u $\mathbb{R}^2$ za ugao $\varphi \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$.

Ortogonalni operatori su automorfizmi euklidskog prostora, tj. održavaju skalarni proizvod, normu i uglove, pa ortonormirani bazis preslikavaju u ortonormirani. U odnosu na operaciju množenja obrazuju ortogonalnu grupu $\mathrm{O}(n)$. U ortonormiranim bazisima, reprezentovani su ortogonalnim matricama: $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = I_n$. Kako je determinanta proizvoda matrica jednaka proizvodu determinanti istih matrica i kako je $\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}^T$, za ortogonalne matrice važi: $(\det \mathcal{A})^2 = 1$, tj. $\det \mathcal{A} = \pm 1$. Ortogonalni operatori, za koje je $\det A = 1$ nazivaju se *specijalne* ili *sopstvene ortogonalne transformacije* i čine *specijalnu* ortogonalnu grupu, $\mathrm{SO}(n)$. Ortogonalni operatori za koje je $\det A = -1$ nazivaju se *nesopstvene ortogonalne transformacije* i ne obrazuju grupu (identična transformacija je sopstvena).

U nastavku će prvo biti proučeni ortogonalni operatori u euklidskim prostorima dimenzija jedan i dva, a zatim i u višedimenzionalnim euklidskim prostorima jer se ovaj opšti slučaj uvek svodi, na osnovu teorema 2.15 i 3.8, na ta dva najjednostavnija slučaja.

Ortogonalni operatori u jednodimenzionalnom euklidskom prostoru

Neka ortogonalni operator A deluje u euklidskom prostoru $L(x)$, obrazovanim normiranim vektorom x. Tada je $Ax = \lambda x$, pa, kako A održava normu, važi $(Ax, Ax) = (x, x) = \| x \|^2 = 1$ i $(Ax, Ax) = \| \lambda x \|^2 = \lambda^2 \| x \|^2 = \lambda^2$. Sledi, $\lambda^2 = 1$, tj. $\lambda = \pm 1$, te se vidi da u jednodimenzionalnom euklidskom prostoru postoje samo dva ortogonalna operatora: identični i operator inverzije ($Ay = -y$ za svako $y \in L(x)$); prvi od njih je specijalna (sopstvena) ortogonalna transformacija, dok je drugi nesopstvena.

Ortogonalni operatori u dvodimenzionalnom euklidskom prostoru

Neka je $X = \{x_1, x_2\}$ ortonormirani bazis u euklidskom prostoru $V(\mathbb{R})$ i neka je ortogonalni operator $A \in \hat{L}(V, V)$ reprezentovan u tom bazisu matricom $\mathcal{A}$. Normiranost kolona omogućava da se takva matrica napiše u obliku $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\psi \end{pmatrix}$. Pri tome je $\det \mathcal{A} = \cos(\varphi+\psi) = \pm 1$.

Za sopstvene ortogonalne transformacije je $\det \mathcal{A} = 1$, pa je $\psi = -\varphi$, i njihov opšti oblik postaje: $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Vidi se da su to rotacije u ravni za ugao φ. Samo za $\varphi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ dobija se simetrični operator, te osim identičnog operatora i inverzije (u dvodimenzionalnom prostoru inverzija i rotacija za π su iste transformacije vektora!) ovakvi operatori nemaju svojstvene vrednosti, niti svojstvene vektore.

U slučaju nesopstvenih transformacija, kada je $\det \mathcal{A} = -1$, pa je $\psi = -\varphi + \pi$, opšti oblik je $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Iz simetričnosti ove matrice, pošto je bazis ortonormiran, sledi da je razmatrana transformacija simetrični operator, te ima ortonormirani svojstveni bazis. Lako se nalaze karakteristični polinom $\det(\mathcal{A} - \lambda I) = \lambda^2 - 1$ i svojstvene vrednosti $\lambda = \pm 1$. Jasno je da odgovarajući svojstveni vektori $\{x_+, x_-\}$ čine ortonormirani svojstveni bazis, tako da je kanonična forma nesopstvenog ortogonalnog operatora u dvodimenzionalnom prostoru $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Očigledno je da ova transformacija opisuje refleksiju u odnosu pravac vektora x_+.

Ortogonalni operatori u euklidskom prostoru proizvoljne dimenzije

U višedimenzionalnom slučaju, stav o invarijantnosti ortokomplementa invarijantnog potprostora (teorem 2.15) pokazuje da se ceo prostor razlaže na svojstvene pravce i invarijantne ravni ortogonalnog operatora, te na osnovu rezultata za prostore dimenzija 1 i 2, važi

Teorem 3.10 *Za ortogonalni operator A postoji ortonormirani bazis u kome se on reprezentuje blok-dijagonalnom matricom, koja na dijagonali ima elemente* 1 *i* -1 *ili blokove* $\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$.

Ovakva matrica se može dobiti množenjem (blok)-dijagonalnih matrica koje na dijagonali imaju sve jedinice, osim jednog elementa -1 (tzv. *prosta refleksija*, jer u jednom pravcu vrši refleksiju, a $(n-1)$-dimenzionalni ortokomplement ostavlja nepromenjenim) i matrica koje na dijagonali imaju $(n-2)$ jedinica i jedan blok (2×2) rotacija u ravni za ugao φ_i (tzv. *prosta rotacija*, jer u jednoj ravni vrši rotaciju, a $(n-2)$-dimenzionalni ortokomplement ostavlja nepromenjenim). Dakle, svaki ortogonalni operator je proizvod izvesnog broja prostih rotacija i prostih refleksija.

Glava 4

TENZORI

Nakon uvođenja pojma dualnog prostora, postupno će se, preko polilinearnih funkcionala doći do pojma tenzora i definicija operacija sa tenzorima. Zatim će biti data definicija direktnog proizvoda matrica kao najjednostavniji primer tenzorskog proizvoda, a potom i definicija tenzorskog proizvoda prostorâ. Zatvaranje ovog kruga je uočavanje bijektivne veze između polilinearnih funkcionala na tenzorskom proizvodu prostora, tenzora tog prostora i vektora iz istog prostora, koja, u krajnjoj instanci, omogućava identifikaciju ova tri pojma. Glava se završava uvođenjem Dirac-ove notacije i pojma dijada.

4.1 DUALNI PROSTOR

Ranije uvedeni linearni funkcional na $V(\mathbb{F})$, definicija 2.7 (§ 2.3.1), je linearni operator koji vektore iz V preslikava u skalare iz $\mathbb{F}$. Stoga je to element vektorskog prostora $\hat{L}(V(\mathbb{F}), \mathbb{F}(\mathbb{F}))$ jednake dimenzije kao i V. Prostor linearnih funkcionala na V se naziva *dualni prostor* prostora V i označava se sa V^*. Dakle, $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \hat{L}(V, \mathbb{F})$ i $\dim V = \dim V^*$, a oba su prostori nad istim poljem. Ranije je pokazano (posledica teorema 1.3, (§ 1.2.3)) da su svi konačnodimenzionalni vektorski prostori iste dimenzije nad istim poljem međusobno izomorfni. Prema tome, $V \cong V^*$, ali neki prirodni, odnosno unapred izdvojeni izomorfizam između ova dva prostora ne postoji. Međutim, kada je $V(\mathbb{F})$ prostor sa skalarnim proizvodom, tada Riesz-Fréchet-ov teorem definiše *dualizam* između V i V^*, koji je *antiizomorfizam* (antilinearna bijekcija) za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, a izomorfizam za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

4.1.1 Dualni prostor V^{**} dualnog prostora V^*

Moguće je produžiti ovakav lanac dualnih prostora, formiranjem *drugog dualnog prostora* $V^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (V^*)^*$, itd. Svi oni su međusobno izomorfni (npr. $V \cong V^*$ i $V^* \cong V^{**}$, a izomorfizam je tranzitivan, kao relacija ekvivalencije, te je $V \cong V^{**}$). Međutim, ispostavlja se da je sve parne stepene moguće identifikovati sa V, a neparne sa V^*, jer postoji prirodni izomorfizam prostora V i V^{**}. Kako je $V^{**} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{L}(V^*, \mathbb{F})$, svaki element V^{**} je funkcional $\overline{x}$, koji vektoru $f \in V^*$ (a to je funkcional na V) pridružuje skalar $\overline{x}(f) \in \mathbb{F}$. S druge strane, i svaki vektor x iz prostora V pridružuje funkcionalu f skalar $f(x)$ iz $\mathbb{F}$, ako se skalar $f(x)$ protumači kao dejstvo funkcionala x na vektor f. Pri tome je ovo preslikavanje linearno: $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ (ovo važi za sve operatore u V) čime i x postaje funkcional na V^*. Stoga prirodni izomorfizam između V i V^{**} uspostavlja relacija: $\overline{x}(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(x)$, čime se vektor x identifikuje sa funkcionalom $\overline{x}$ iz V^{**} koji na isti način deluje u V^*. Značajna posledica ovog zaključka je da V i V^* formiraju sva linearna preslikavanja u polje $\mathbb{F}$ tenzorskih prostora koji će kasnije biti izgrađeni pomoću prostora V.

4.1.2 Reprezentovanje funkcionala i biortogonalni bazisi

Dualni prostor je moguće razmatrati nezavisno od prostora V, ne uzimajući u obzir činjenicu da su njegovi vektori funkcionali na V. Izborom bazisa u V^*, svakom vektoru se pridružuje kolona, i ceo postupak reprezentovanja opisan u opštem slučaju se ponavlja. Tako, ako je $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ neki bazis u prostoru V^*, funkcionalu $f = \sum_{i=1}^n \phi_i f_i$ se pridružuje kolona $\mathtt{f} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\phi_1, \dots, \phi_n)^T \in \mathbb{F}^n$. Delovanje funkcionala f na vektor x iz V je $f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i f_i(x)$.

Međutim, kao operatori u V, funkcionali se mogu reprezentovati i na način karakterističan za operatore. Linearni operator $A \in \hat{L}(V(\mathbb{F}), U(\mathbb{F}))$ se, izborom bazisa $\{v_1, \dots, v_n\}$ u V i $\{u_1, \dots, u_m\}$ u U, reprezentuje matricom $\mathcal{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{F}^{mn}$, koja je određena osnovnom formulom reprezentovanja (2.1): $Av_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} u_j$, $i = 1, \dots, n$. Vektori $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \in V$ i $y = \sum_{i=1}^m \eta_i u_i \in U$ su u istim bazisima reprezentovani kolonama $\mathtt{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{F}^n$ i $\mathtt{y} = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T \in \mathbb{F}^m$. Specijalno, linearni funkcional f je linearni operator iz $V(\mathbb{F})$ u $\mathbb{F}(\mathbb{F})$, tj. $f \in \hat{L}(V, \mathbb{F})$ (uobičajeno je kod funkcionala zadržati opšte pravilo pisanja argumenta u zagradi, koja je kod ostalih operatora izostavljena da bi se dobila jasnija slika dejstva operatora na vektor). Stoga se i funkcional reprezentuje na opisani način, s tim što se uvek za bazis prostora $\mathbb{F}$ uzima broj 1 (za razliku od opšteg slučaja vektorskog prostora, $\mathbb{F}$ je takođe i algebra sa jedinicom, pa u njoj postoji prirodno izdvojeni element 1). Dakle, formula reprezentovanja u bazisu $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ prostora V postaje $f(v_i) = \varphi_{1i} \cdot 1 = \varphi_i$, $i = 1, \dots n$, i reprezentaciona matrica za f je vrsta $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (f(v_1), \dots, f(v_n)) \in \mathbb{F}^{1n}$. Dejstvo funkcionala f na vektor $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \in V$ se u datoj reprezentaciji svodi na matrično množenje reprezentacione vrste funkcionala i kolone vektora:

$$\varphi(\mathtt{x}) = \varphi \mathtt{x} = (f(v_1), \dots, f(v_n)) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \xi_i f(v_i). \tag{4.1}$$

Mogućnost izražavanja funkcionala i preko bazisa u V^* i preko bazisa u V, nameće pitanje veze ovakvih reprezentacija, i konačno, veze samih bazisa. Neka su B i B^* ranije definisani bazisi u V i V^*. Dejstvom bazisnih funkcionala na bazisne vektore određeni su skalari $f_i(v_j) = g_{ij} \in \mathbb{F}$ $(i, j = 1, \dots, n)$. Tada je delovanje funkcionala $f = \sum_{i=1}^n \phi_i f_i$ na proizvoljan vektor $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \in V$ dato izrazom $f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i f_i(\sum_{j=1}^n \xi_j v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i \xi_j f_i(v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_i g_{ij} \xi_j$. Ovaj rezultat se može napisati i u obliku $f(x) = \mathtt{f}^T \mathcal{G} \mathtt{x}$, gde je $\mathcal{G}$ matrica sa elementima g_{ij}. Kada je $x = v_j$, bazisni vektor (iz B), dobija se $f(v_j) = \varphi_j = \sum_{i=1}^n \phi_i g_{ij}$, odnosno, u matričnom obliku $\varphi = \mathtt{f}^T \mathcal{G}$. Odavde je jasno da reprezentaciona vrsta φ ima iste elemente kao reprezentaciona kolona $\mathtt{f}$, ako i samo ako su bazisi B i B^* povezani relacijom $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, $(i, j = 1, \dots, n)$ odnosno $\mathcal{G} = I_n$.

Definicija 4.1 *Bazisi $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ prostora V i $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ dualnog prostora V^* se nazivaju* biortogonalni bazisi *ako njihovi vektori zadovoljavaju uslov $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.*

Treba obratiti pažnju da pojam biortogonalnosti nije povezan sa skalarnim proizvodom, te se biortogonalni bazisi mogu formirati i u prostorima bez skalarnog proizvoda, u kojima obična ortogonalnost nije ni definisana. Kao i uvek, bazisni funkcionali su u bazisu B^*, tretirani kao vektori, reprezentovani kolonama apsolutnog bazisa u $\mathbb{F}^n$, pa su u biortogonalnom bazisu B, kao operatori, reprezentovani vrstama apsolutnog bazisa u $\mathbb{F}^{1n}$. Ovo zapažanje je istovremeno i dokaz za egzistenciju i jedinstvenost biortoganalnog bazisa B^*, za bilo koji odabrani bazis B u V: biortogonalni bazis čine upravo oni funkcionali koji se u bazisu B reprezentuju vrstama apsolutnog bazisa u $\mathbb{F}^{1n}$.

4.1.3 Promena bazisa i reprezentovanje funkcionala

Ranije je pokazano, § 2.2.5, da se pri promeni bazisa prostora $V(\mathbb{F})$, matricom prelaska $\mathcal{T} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, brojna kolona $\mathtt{x} \in \mathbb{F}^n$ koja reprezentuje proizvoljni vektor $x \in V$, menja kontravarijantno, $\mathtt{x} \to \mathcal{T}^{-1}\mathtt{x}$, a matrica $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{nn}$ koja reprezentuje operator $A \in \hat{L}(V, V)$, menja se transformacijom sličnosti jedanput kovarijantno i jedanput kontravarijantno: $\mathcal{A} \to \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$. Poslednjim pravilom (pošto bazis $\{1\}$ prostora $\mathbb{F}$ ostaje nepromenjen) je zapravo određen i način promene reprezentujuće vrste funkcionala.

Neka je bazis $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ prostora V dobijen iz bazisa, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ matricom prelaska $\mathcal{T}$, tj. $v'_i = \sum_{j=1}^n \tau_{ji} v_j$. Neka su dalje, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ i $\varphi' = (\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n)$ vrste iz $\mathbb{F}^{1n}$, koje reprezentuju funkcional f u starom i novom bazisu, respektivno (tj. $\varphi_i = f(v_i)$ i $\varphi'_i = f(v'_i)$). Tada je $\varphi'_i = f(v'_i) = f(\sum_{j=1}^n \tau_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^n \tau_{ji} f(v_j) = \sum_{j=1}^n \tau_{ji}\varphi_j$. Dakle, $\varphi'_i = \sum_{j=1}^n \varphi_j \tau_{ji}$ za $i = 1, \ldots, n$, ili u matričnoj formi $\varphi' = \varphi\mathcal{T}$, pa se, pri promeni bazisa u prostoru V, vrste koje reprezentuju linearni funkcional na V transformišu kovarijantno (tj. na isti način kao i bazis u V!).

Međutim, linearni funkcional f na V je ujedno i vektor iz dualnog prostora V^*, a kako se u biortogonalnim bazisima reprezentuje vrstom (kao operator), odnosno kolonom (kao vektor) sa istim odgovarajućim elementima, postavlja se pitanje kako se pri prelasku sa starog na novi bazis u prostoru V transformišu odgovarajući biortogonalni bazisi u V^*.

Neka su $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ i $B'^* = \{f'_1, \ldots, f'_n\}$ bazisi u V^* biortogonalni bazisima B i B' u V, tj. $f_i(v_j) = f'_i(v'_j) = \delta_{ij}$. Matrica $\mathcal{S} = (\sigma_{ij})$, koja povezuje biortogonalne bazise, tj. zadovoljava relacije $f'_i = \sum_{k=1}^n \sigma_{ki} f_k$, $i = 1, \ldots, n$ se lako određuje iz uslova biortogonalnosti: $\delta_{ij} = f'_i(v'_j) = \sum_{l=1}^n \sigma_{li} f_l(\sum_{k=1}^n \tau_{kj} v_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tau_{kj}\sigma_{li} f_l(v_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tau_{kj}\sigma_{li}\delta_{lk} = \sum_{k=1}^n \tau_{kj}\sigma_{ki} = \sum_{k=1}^n \{\mathcal{S}^T\}_{ik}\{\mathcal{T}\}_{kj} = \{\mathcal{S}^T\mathcal{T}\}_{ij}$, ili u matričnoj formi, $I_n = \mathcal{S}^T\mathcal{T}$. Prema tome, tražena matrica $\mathcal{S}$ je kontragredijentna matrici prelaska $\mathcal{T}$: $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{T^{-1}}$. Konačno, koristeći kolone funkcionala, ovo se može zapisati u formi $\mathcal{T}^{-1}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix}$; kako je istovremeno $(v_1, \ldots, v_n)\mathcal{T} = (v'_1, \ldots, v'_n)$, vidi se da se pri (kovarijantnoj) promeni bazisa u V, odgovarajući biortogonalni bazis u V^* transformiše kontravarijantno (kao reprezentacione kolone vektora iz V).

4.1.4 Dualni prostor unitarnog i euklidskog prostora

Prema Riesz-Fréchet-ovom teoremu, svakom linearnom funkcionalu f na prostoru V sa skalarnim proizvodom jedinstveno odgovara vektor $x \in V$, takav da je $f(y) = (x, y)$, za svako y iz V. Na taj način, definisana je bijekcija D prostora V na dualni prostor V^*, takva da je $f = Dx$, $x = D^{-1}f$, koja se naziva *dualizam*, a za vektor $x \in V$ i funkcional $f \in V^*$ povezene dualizmom, kaže se da su međusobno *dualni*.

Kod kompleksnih prostora dualizam je antilinearan: $D(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1^* D x_1 + \alpha_2^* D x_2$, što je direktna posledica antilinearnosti skalarnog proizvoda po prvom faktoru. Kod realnih prostora, dualizam je istovremeno izomorfizam. Pri tome, ako je $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormirani bazis u V, važi $D^{-1}f = \sum_{i=1}^n f(v_i)^* v_i$.

Skalarni proizvod u V na prirodan način indukuje skalarni proizvod u dualnom prostoru: za svaki par funkcionala $f = Dx$ i $g = Dy$ se definiše $(f, g) = (Dx, Dy) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)^*$ (lako se proverava da su ispunjene sve osobine skalarnog proizvoda).

Dualni vektori, $B' = \{Dv_1, \dots, Dv_n\}$, bazisa $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ u V čine bazis u V^* (naime, iz $0 = \sum_i \alpha_i D v_i = D(\sum_i \alpha_i^* v_i)$ sledi $\alpha_i = 0, \forall i$), koji se naziva *dualni bazis*. Ako je bazis B ortonormiran, takav je i dualni (u odnosu na indukovani skalarni proizvod): $(Dv_i, Dv_j) = (v_i, v_j)^* = \delta_{ij}$. U stvari, ako je B ortonormiran, njemu dualan i biortogonalan bazis se podudaraju, $B^* = B'$. To se vidi iz samog uslova $f_i(v_j) = \delta_{ij} = (v_i, v_j) \equiv Dv_i(v_j)$, koji, kako je već pokazano, jednoznačno određuje bazis funkcionala. Naravno, ako B nije ortonormiran, tj. postoje i i j za koje je $(v_i, v_j) \neq \delta_{ij}$, tada za odgovarajući dualni vektor Dv_i, važi $Dv_i(v_j) = (v_i, v_j) \neq \delta_{ij}$, pa on, premda dualan, ne može pripadati biortogonalnom bazisu.

Reprezentovanje vektora iz V^* u ortonormiranom bazisu prostora V

Neka je $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormiran bazis prostora V, $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ proizvoljni vektor iz V, a f njemu dualni vektor, $f = Dx$. Tada je $f(v_j) = (x, v_j) = (\sum_{i=1}^n \xi_i v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n \xi_i^* (v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n \xi_i^* \delta_{ij} = \xi_j^*$. Dakle, ako se vektor $x \in U$ u ortonormiranom bazisu prostora U reprezentuje kolonom $\mathtt{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{F}^n$, tada se njemu dualni vektor $f = Dx$, u istom bazisu, po osnovnoj formuli reprezentovanja linearnih operatora, reprezentuje vrstom $\mathtt{x}^\dagger = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \in \mathbb{F}^{1n}$.

Reprezentovanje operatora na V^* u ortonormiranom bazisu prostora V

Ranije je pokazano, § 2.1.3, da svaki izomorfizam prostora indukuje, transformacijom sličnosti, izomorfizam algebri koje deluju u tim prostorima. Lako se proverava da isto važi i za antiizomorfizam (antilinearna bijekcija koja održava algebarsku strukturu do na kompleksnu konjugaciju). Prema tome, dualizam D prostora V i V^*, indukuje dualizam $\hat{D} \stackrel{\text{def}}{=} D \dots D^{-1}$, algebre $\hat{L}(V, V)$ na algebru $\hat{L}(V^*, V^*)$.

Ako je operator $A \in \hat{L}(V, V)$ u ortonormiranom bazisu $\{v_i\}$ reprezentovan matricom $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$, onda je, u dualnom bazisu $\{f_i = Dv_i\}$, operator $A^* \stackrel{\text{def}}{=} \hat{D}A = DAD^{-1} \in \hat{L}(V^*, V^*)$ reprezentovan kompleksno konjugovanom matricom $\mathcal{A}^* = (\alpha_{ij}^*)$, jer je $\underline{A^* f_i} = DAD^{-1} f_i = DAv_i = D\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}^* D v_j = \underline{\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}^* f_j}$.

S druge strane, $A^*(Dx) = DAD^{-1}Dx = D(Ax)$ je vektor iz prostora V^* i može se, kao linearni funkcional, preko osnovne formule reprezentovanja, reprezentovati u ortonormiranom bazisu prostora V, vrstom $(\mathcal{A}\mathtt{x})^\dagger = \mathtt{x}^\dagger \mathcal{A}^\dagger$. Kako vrsta $\mathtt{x}^\dagger$, kao što je pokazano u prethodnom pododeljku, reprezentuje vektor Dx, a dobijena relacija važi za svako x, zaključuje se da se operator A^* u dualnom ortonormiranom bazisu prostora V reprezentuje adjungovanom matricom $\mathcal{A}^\dagger$ reprezentativne matrice $\mathcal{A}$ dualnog operatora A. Pri tome, matrica $\mathcal{A}^\dagger$ deluje na levo na vrste

$\mathbf{x}^\dagger$ koje reprezentuju funkcionale u istom bazisu.

4.2 DEFINICIJA TENZORA

U ovom odeljku će se, preko pojma polilinearnog funkcionala, koji sa svoje strane, predstavlja generalizaciju pojma linearnog funkcionala, doći do definicije tenzora. Pored toga, polilinearni funkcionali imaju poseban značaj za fiziku kao nužna tehnika kojom se apstraktnim teorijskim pojmovima opisanim vektorima u nekim relevantnim prostorima pridružuju brojevi, rezultati eksperimenata.

Na kraju, kao primer tenzora, biće definisan metrički tenzor u euklidskom prostoru.

4.2.1 Polilinearni funkcional

Definicija 4.2 Polilinearni funkcional $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ *tipa* (p, q) *je preslikavanje* p *kontravarijantnih vektora* $x, y, \ldots \in V$ *(gde je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$*) i* q *kovarijantnih vektora* $f, g, \ldots \in V^*$ *(gde je* V^* *dualni prostor prostora* V*) u polje* $\mathbb{F}$*, linearno po svakom od argumenata pri fiksiranim ostalim argumentima.*

Na primer, za fiksirane sve vektore osim prvog, važi

$$l(x' + x'', y, \ldots; f, g, \ldots) = l(x', y, \ldots; f, g, \ldots) + l(x'', y, \ldots; f, g, \ldots),$$

$$l(\alpha x, y, \ldots; f, g, \ldots) = \alpha l(x, y, \ldots; f, g, \ldots), \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{F}.$$

Analogno,

$$l(x, y, \ldots; f' + f'', g, \ldots) = l(x, y, \ldots; f', g, \ldots) + l(x, y, \ldots; f'', g, \ldots),$$

$$l(x, y, \ldots; \alpha f, g, \ldots) = \alpha l(x, y, \ldots; f, g, \ldots).$$

Isto važi i za ostale argumente.

Polilinearni funkcional koji preslikava p vektora iz V (kontravarijantnih) i q vektora iz V^* (kovarijantnih) u $\mathbb{F}$ zove se *polilinearni funkcional tipa* (p, q).

Najjednostavniji polilinearni funkcionali su funkcionali tipa $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Polilinearni funkcional tipa $(1, 0)$ je linearni funkcional, tj. preslikavanje jednog vektora iz prostora V u polje $\mathbb{F}$, (dakle, vektor iz prostora V^*: kovarijantni vektor). Analogno, polilinearni funkcional tipa $(0, 1)$ je linearni funkcional jednog vektora iz prostora V^*, tj. vektor iz prostora $V^{**} = V$ (kontravarijantni vektor). Polilinearnih funkcionala koji zavise od dva vektora (bilinearnih funkcionala) ima tri tipa: $(2, 0)$, $(1, 1)$ i $(0, 2)$. Primer bilinearnog funkcionala tipa $(2, 0)$ je skalarni proizvod u euklidskom prostoru.

Polilinearni funkcionali tipa $(1, 0)$ i $(0, 1)$ zovu se jednostavno *linearni funkcionali*, dok se polilinearni funkcionali tipa $(2, 0)$, $(1, 1)$ i $(0, 2)$ često nazivaju *bilinearnim formama.*

Polilinearni funkcional u datom bazisu. Prelaz sa jednog bazisa na drugi.

Ovde će biti izražen polilinearni funkcional preko koordinata vektora od kojih zavisi. Da bi se izbeglo pisanje dugačkih formula, razmatranje će biti sprovedeno na slučaju polilinearnog funkcionala tipa $(2, 1)$.

Neka je dat bazis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ prostora V. Njemu biortogonalan bazis u prostoru V^* je bazis[1] $\{f^1, \ldots, f^n\}$ (prema definiciji uzajamno biortogonalnih bazisa važi $f^i(v_j) = \delta^i_j$). Neka je $x = \sum_{i=1}^n \xi^i v_i$, $y = \sum_{i=1}^n \eta^i v_i$ i $f = \sum_{i=1}^n \varphi_i f^i$. Tada je

$$l(x, y; f) = l(\sum_{i=1}^n \xi^i v_i,\ \sum_{j=1}^n \eta^j v_j;\ \sum_{k=1}^n \varphi_k f^k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi^i \eta^j \varphi_k\ l(v_i, v_j; f^k).$$

Dakle, polilinearni funkcional u datim biortogonalnim bazisima ima oblik

$$l(x, y; f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a^k_{ij}\ \xi^i \eta^j \varphi_k,$$

gde su ξ^i, η^j i φ_k koordinate vektora x, y i f, respektivno. Brojevi a^k_{ij} definišu funkcional $l(x, y; f)$ i dati su formulama

$$a^k_{ij} = l(v_i, v_j; f^k),$$

i na taj način zavise od izbora bazisa u V. (Izborom bazisa u V jednoznačno je određen njemu biortogonalni bazis u V^*.)

Potpuno analogna formula važi i u slučaju polilinearnog funkcionala opšteg oblika:

$$l(x, y, \ldots; f, g, \ldots) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ldots \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a^{rs\ldots}_{ij\ldots}\ \xi^i \eta^j\ \ldots \varphi_r \gamma_s\ \ldots, \tag{4.2}$$

gde su brojevi $a^{rs\ldots}_{ij\ldots}$ koji definišu polilinearni funkcional dati izrazima:

$$a^{rs\ldots}_{ij\ldots} = l(v_i, v_j, \ldots; f^r, f^s, \ldots). \tag{4.3}$$

Kako se menja sistem brojeva (4.3) koji definiše polilinearnu formu (drugi izraz za polilinearni funkcional) pri promeni bazisa ?

Neka je u V dat bazis $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i u V^* njemu biortogonalan bazis $\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$. Neka je novi bazis $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ V i njemu biortogonalan bazis $\{f'^1, f'^2, \ldots, f'^n\}$.

Ranije je pokazano, § 4.1.3, ako se matricom prelaska $\mathcal{T} = (\tau^i_j)$ prelazi sa starog na novi bazis u prostoru V, tj. ako važi $v'_i = \sum_{j=1}^n \tau^j_i v_j \quad (i = 1, \ldots, n)$, da tada matrica $\mathcal{S} = (\sigma^i_j)$ povezuje odgovarajuće biortogonalne bazise relacijom: $f'^i = \sum_{j=1}^n \sigma^i_j f^j \quad (i = 1, \ldots, n)$, pri čemu je $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{-1}$.

[1] Od ovog mesta, pa do kraja ove glave se primenjuje konvencija pisanja gornjih indeksa za kontravarijantne objekte i donjih indeksa za kovarijantne. Tako se bazis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ u prostoru V obeležava donjim, a njemu biortogonalni bazis $\{f^1, \ldots, f^n\}$ gornjim indeksima. U skladu s tim, koordinate vektora iz V imaju gornji indeks, dok koordinate vektora iz V^* (tj. koeficijenti linearnog funkcionala) imaju donje indekse. Matrični elementi reprezentacionih matrica linearnog operatora, koji su jednom kovarijantni i jednom kontravarijantni pišu se sa jednim donjim i jednim gornjim indeksom, pri čemu je gornji indeks *prvi*.

Treba naći sistem brojeva $a'^{rs\dots}_{ij\dots}$ koji određuje polilinearni funkcional l u bazisima $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ i $\{f'^1, f'^2, \dots, f'^n\}$.

Očigledan niz jednakosti

$$a'^{rs\dots}_{ij\dots} = l(v'_i, v'_j, \dots; f'^r, f'^s, \dots) = l(\sum_k \tau^k_i v_k, \sum_m \tau^m_j v_m, \dots; \sum_t \sigma^r_t f^t, \sum_u \sigma^s_u f^u, \dots) =$$

$$= \sum_k \sum_m \dots \sum_t \sum_u \dots \tau^k_i \tau^m_j \dots \sigma^r_t \sigma^s_u \dots l(v_k, v_m, \dots; f^t, f^u, \dots) =$$

$$= \sum_k \sum_m \dots \sum_t \sum_u \dots \tau^k_i \tau^m_j \dots \sigma^r_t \sigma^s_u \dots a^{tu\dots}_{km\dots}$$

daje traženu relaciju. (Iskorišćena je definicija sistema brojeva $a'^{rs\dots}_{ij\dots}$, veza starih i novih uzajamno biortogonalnih bazisa, linearnost polilinearnog funkcionala po svim ulazima, i na kraju, opet definicija sistema brojeva $a^{tu\dots}_{km\dots}$.)

Time je dokazan

Teorem 4.1 *Sistem brojeva $a^{rs\dots}_{ij\dots}$ $(i, j, \dots, r, s, \dots = 1, 2, \dots n = \dim V)$ koji određuje polilinearni funkcional u uzajamno biortogonalnim bazisima $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$, pri prelasku na nove bazise $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ i $\{f'^1, f'^2, \dots, f'^n\}$ transformiše se po formuli*

$$a'^{rs\dots}_{ij\dots} = \sum_{k,m,\dots} \sum_{t,u,\dots} \tau^k_i \tau^m_j \dots \sigma^r_t \sigma^s_u \dots a^{tu\dots}_{km\dots},$$

gde su τ^i_j i σ^i_j elementi matrica prelaska $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ iz bazisa $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$ u bazise $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ i $\{f'^1, f'^2, \dots, f'^n\}$, respektivno. (Sumira se od 1 do dimenzije prostora V i svi indeksi uzimaju vrednosti u istom intervalu, tako da se sistemi brojeva $a'^{rs\dots}_{ij\dots}$ i $a^{rs\dots}_{ij\dots}$ sastoje od po n^{p+q} brojeva, gde je p broj donjih indeksa, a q broj gornjih indeksa.)

Izraz (4.3) treba shvatiti kao reprezentovanje polilinearnog funkcionala sistemom brojeva $a^{rs\dots}_{ij\dots}$ u bazisu $\{v_1, \dots, v_n\}$ i njemu biortogonalnom bazisu $\{f^1, \dots, f^n\}$ u punoj analogiji sa reprezentovanjem vektora kolonama ili operatora matricama, pri čemu teorem 4.1 daje odgovarajuću promenu reprezentacije pri promeni bazisa.

4.2.2 Definicija tenzora

Do sada uvedeni pojmovi (kao što su vektori, linearni funkcionali, linearni operatori itd.) definisani su u svakom bazisu odgovarajućim sistemom brojeva. Na primer, vektor je u svakom bazisu određen sistemom od n brojeva (gde je n dimenzija prostora) — koordinatama. Linearni funkcional je određen u svakom bazisu, takođe sistemom od n brojeva — koeficijentima. Linearni operator je definisan u svakom bazisu sistemom od n^2 brojeva — matricom linearnog operatora. Bilinearni funkcional je određen u svakom bazisu sistemom od n^2 brojeva — matricom date bilinearne forme. Pri prelasku sa jednog bazisa na drugi, sistem brojeva koji definiše dati objekat, transformiše se na određeni način, pri čemu je zakon transformacije različit za različite objekte. Na primer, i vektor iz prostora V i linearni funkcional u V zadaju se sistemom od n brojeva, međutim, pri promeni bazisa transformišu se na različite načine. Da bi se potpuno definisale ove veličine, treba zadati, ne samo vrednosti odgovarajućih brojeva u proizvoljnom bazisu, nego i zakon transformacije tog skupa brojeva pri promeni bazisa.

U prethodnom pododeljku ovog teksta uveden je pojam polilinearnog funkcionala, koji je definisan u proizvoljnom bazisu sistemom od n^{p+q} brojeva (4.3), koji se transformišu pri prelasku na novi bazis formulom datom u teoremu 4.1. S tim u vezi, uvodi se definicija pojma *tenzora* koji igra važnu ulogu u fizici, geometriji i algebri.

Definicija 4.3 *Ako proizvoljnom bazisu u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru $V = V(\mathbb{F})$ odgovara sistem od n^{p+q} brojeva $a_{ij\dots}^{rs\dots}$ koji se pri prelasku na novi bazis matricom prelaska $\mathcal{T} = (\tau_j^i)$ transformišu po formuli*

$$a_{ij\dots}^{\prime rs\dots} = \sum_{k,m,\dots} \sum_{t,u,\dots} \tau_i^k \tau_j^m \dots \sigma_t^r \sigma_u^s \dots a_{km\dots}^{tu\dots}, \tag{4.4}$$

gde je $\mathcal{S} = (\sigma_j^i)$, $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{-1}$, kaže se da je dat tenzor tipa *(p, q), p puta kovarijantan i q puta kontravarijantan. Broj $p + q$ naziva se* rang *ili* valentnost tenzora*. Brojevi $a_{ij\dots}^{rs\dots}$ se nazivaju* komponente tenzora*.*

Iz definicije 4.3 i teorema 4.1 je jasno da su zakoni transformacije tenzora i polilinearnog funkcionala identični, te svakom polilinearnom funkcionalu tipa (p, q) jednoznačno odgovara tenzor ranga $p + q$, p puta kovarijantan i q puta kontravarijantan. Obratno, svakom tenzoru jednoznačno odgovara polilinearni funkcional. U nastavku će svojstva tenzora i operacije nad njima biti proučane na "modelu" polilinearnih funkcionala.

Primeri

1. *Skalar.* Tenzor sa samo jednom komponentom a koja je ista u svim bazisima. Prema tome, skalar je tenzor ranga nula.

2. *Kontravarijantni vektor.* Vektoru x iz V u svakom bazisu odgovara n koordinata (brojna kolona $\mathtt{x} \in \mathbb{F}^n$), koje se pri prelasku u drugi bazis transformišu po formuli $\mathtt{x}' = \mathcal{T}^{-1}\mathtt{x}$, gde je $\mathcal{T}$ matrica prelaska sa starog bazisa $\{v_i\}$ na novi bazis $\{v_i'\}$. Prema tome, vektori iz V su primeri kontravarijantnih tenzora ranga jedan, odnosno tenzora tipa $(0, 1)$.

3. *Linearni funkcional (kovarijantni vektor).* Brojevi a_i koji određuju linearni funkcional f (dejstvom na bazis, tj. $a_i = f(v_i)$, $i = 1, \dots, n$) transformišu se po formuli $a_i' = \sum_j \tau_i^j a_j$, gde je $(\tau_j^i) = \mathcal{T}$ matrica prelaska sa starog na novi bazis. Prema tome, linearni funkcional je primer kovarijantnog tenzora ranga jedan, odnosno tenzora tipa $(1, 0)$.

4. *Linearni operator.* Neka je $A \in \hat{L}(V, V)$. Njemu, u svakom bazisu prostora V odgovara sistem od n^2 brojeva α_j^i, $(i, j = 1, \dots, n)$, tj. reprezentaciona matrica $\mathcal{A} = (\alpha_j^i)$ tipa $n \times n$. Reprezentaciona matrica linearnog operatora pri prelasku sa starog na novi bazis transformiše po formuli $\mathcal{A}' = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T}$ (transformacija sličnosti) gde je $\mathcal{T}$ matrica prelaska sa starog na novi bazis. Dakle, matrični elementi se transformišu po formuli $\alpha_j^{\prime i} = \sum_k \sum_l \tau_j^k \sigma_l^i \alpha_k^l$, što znači da je linearni operator primer mešovitog tenzora ranga dva, tj. tenzora tipa $(1, 1)$.

5. Specijalan slučaj linearnog operatora je identična transformacija I_V koja ostavlja nepromenjenim sve vektore iz V. Ovom operatoru u svakom bazisu odgovara jedinična matrica I_n, tj. sistem brojeva
$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 \text{ za } i = k, \\ 0 \text{ za } i \neq k \end{cases}.$$
Ovaj tenzor ima iste komponente u svim bazisima !

Na kraju ovog pododeljka, navedena su dva teorema o tenzorima (bez dokazâ, koji su inače krajnje jednostavni).

Teorem 4.2 *Dva tenzora istog tipa su jednaka ako i samo ako imaju iste komponente u proizvoljnom bazisu.*

Teorem 4.3 *Za dato p i q može se formirati tenzor tipa (p, q) čije komponente su u proizvoljnom bazisu date sa n^{p+q} unapred zadatih brojeva.*

4.2.3 Metrički tenzor

Neka je u unitarnom prostoru U_n dat bazis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ i neka su vektori $x = \sum_{i=1}^n \xi^i u_i$ i $y = \sum_{i=1}^n \eta^i u_i$ proizvoljni vektori iz U_n. Skalarni proizvod tih vektora je $(x, y) = (\sum_i \xi^i u_i, \sum_j \eta^j u_j) = \sum_i \sum_j \xi^{i*} \eta^j \, (u_i, u_j)$. Neka je $\mathcal{G} = (g_{ij}),\ g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (u_i, u_j)\ i, j = 1, \ldots, n$, tzv. *Gram-ova matrica.* Tada se gornji skalarni proizvod može napisati u obliku
$$\sum_{i,j} \xi^{i*} g_{ij} \eta^j = \begin{pmatrix} \xi^{1*} & \ldots & \xi^{n*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \mathtt{x}^\dagger \mathcal{G} \mathtt{y}.$$

Za razliku od skalarnog proizvoda u unitarnom prostoru U_n, skalarni proizvod u euklidskom prostoru E_n je bilinearan, te se može posmatrati kao bilinearni funkcional tipa $(2, 0)$. Naime, može se definisati bilinearna forma $l(x, y;) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y),\ \forall\ x, y \in E_n$. S druge strane, $(x, y) = \sum_{i,j} \xi^i \eta^j g_{ij}$, gde je $g_{ij} = (e_i, e_j)$, skalarni proizvod bazisnih vektora iz E_n. Dakle, dobija se $l(x, y;) = \sum_{i,j} \xi^i \eta^j g_{ij}$, odnosno $g_{ij},\ (i, j = 1, \ldots, n)$ su komponente tenzora ranga dva, dva puta kovarijantnog, tj. tenzora tipa $(2, 0)$. Upravo je definisan *metrički tenzor* u euklidskom prostoru E_n.

Analogno se definiše metrički tenzor u dualnom prostoru euklidskog prostora. Naime, $g^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (f^i, f^j),\ i, j = 1, \ldots, n$ (gde su f^i bazisni vektori u dualnom prostoru) su komponente metričkog tenzora (dva puta kontravarijantnog) u E_n^*.

4.3 OSNOVNE OPERACIJE SA TENZORIMA

Ovde će biti definisane tri osnovne operacije sa tenzorima: zbir, proizvod i kontrakcija tenzora.

S obzirom na ustanovljenu vezu između polilinearnog funkcionala i tenzora, biće prvo date definicije operacija sa polilinearnim funkcionalima. Zapis ovih definicija u proizvoljnom bazisu definiše odgovarajuću operaciju sa tenzorima.

4.3.1 Zbir tenzora

Neka su $l'(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ i $l''(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ dva polilinearna funkcionala istog tipa. Nihov zbir je definisan formulom

$$l(x, y, \ldots; f, g, \ldots) = l'(x, y, \ldots; f, g, \ldots) + l''(x, y, \ldots; f, g, \ldots).$$

Očigledno je da je njihova suma polilinearni funkcional istog tipa.

Dakle, zbir tenzora je definisan formulom

$$a^{rs\ldots}_{ij\ldots} = a'^{rs\ldots}_{ij\ldots} + a''^{rs\ldots}_{ij\ldots}.$$

4.3.2 Množenje tenzora

Neka su $l'(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ i $l''(z, \ldots; h, \ldots)$ dva polilinearna funkcionala tipa (p', q') i (p'', q''), respektivno. Tada je njihov proizvod određen formulom

$$l(x, y, \ldots, z, \ldots; f, g, \ldots, h, \ldots) = l'(x, y, \ldots; f, g, \ldots)\, l''(z, \ldots; h, \ldots).$$

Polilinearni funkcional l (ranga $p' + p'' + q' + q''$, tipa $(p' + p'', q' + q'')$) se naziva proizvodom polilinearnog funkcionala l', tipa (p', q') i polilinearnog funkcionala l'' tipa (p'', q'').

Kada se komponente tenzora koje odgovaraju proizvodu polilinearnih funkcionala l' i l'' izraze preko komponenti tenzora koje odgovaraju samim tim polilinearnim funkcionalima, dobija se zakon množenja tenzora. Ako je $a'^{rs\ldots}_{ij\ldots} = l'(v_i, v_j, \ldots; f^r, f^s, \ldots)$ i $a''^{tu\ldots}_{kl\ldots} = l''(v_k, v_l, \ldots; f^t, f^u, \ldots)$, tada je

$$a^{rs\ldots tu\ldots}_{ij\ldots kl\ldots} = a'^{rs\ldots}_{ij\ldots}\, a''^{tu\ldots}_{kl\ldots}.$$

Na taj način, ova formula definiše proizvod dva tenzora.

Direktan proizvod matrica je primer množenja tenzora.

4.3.3 Kontrakcija tenzora

Neka je $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ polilinearni funkcional tipa (p, q). Cilj je da se od njega formira polilinearni funkcional tipa $(p - 1, q - 1)$. Neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ proizvoljan bazis u prostoru V, i $\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ njemu biortogonalan bazis i neka je

$$l'(y, \ldots; g, \ldots) = \sum_{m=1}^{n} l(v_m, y, \ldots; f^m, g, \ldots). \tag{4.5}$$

Očigledno je da je svaki član ove sume kao i cela suma polilinearni funkcional od $y, \ldots$ i $g, \ldots$. Biće pokazano da, mada je svaki član određen izborom bazisa, suma (4.5) ne zavisi od izbora bazisa.

Neka je $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ novi bazis, a $\{f'^1, f'^2, \ldots, f'^n\}$ njemu biortogonalni bazis. Kako se pri tome vektori $y, \ldots$ i $g, \ldots$ ne menjaju, oni se mogu fiksirati, a gornje tvrđenje pokazati za bilinearnu formu $l(x; f)$. Dakle, dovoljno je pokazati da je

$$\sum_{m=1}^{n} l(v_m; f^m) = \sum_{m=1}^{n} l(v'_m; f'^m).$$

Ako je prelaz sa bazisa $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ na bazis $\{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ dat formulama $v'_m = \sum_j \tau^j_m v_j$, $(m = 1, \ldots, n)$, onda je prelaz sa bazisa $\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ na bazis $\{f'^1, f'^2, \ldots, f'^n\}$ dat formulama $f'^i = \sum_j \sigma^i_j f^j$, $(i = 1, \ldots, n)$, gde je matrica $\mathcal{S} = (\sigma^i_j)$ inverzna matrici prelaska $\mathcal{T} = (\tau^i_j)$, tj. $\mathcal{S}\mathcal{T} = I_n$, odnosno, $\sum_k \tau^i_k \sigma^k_j = \delta^i_j$.

Dakle,

$$\sum_m l(v'_m; f'^m) = \sum_m l(\sum_j \tau^j_m v_j; \sum_k \sigma^m_k f^k) = \sum_j \sum_k \sum_m \tau^j_m \sigma^m_k \, l(v_j; f^k) =$$

$$= \sum_j \sum_k \delta^j_k \, l(v_j; f^k) = \sum_k l(v_k; f^k),$$

odnosno, $\sum_k l(v_k; f^k)$ zaista ne zavisi od izbora bazisa.

Preostaje još da se nađu, na osnovu koeficijenata forme $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$, koeficijenti forme (4.5). Pošto je

$$a'^{s\ldots}_{j\ldots} = l'(v_j, \ldots; f^s, \ldots)$$

i

$$l'(v_j, \ldots; f^s, \ldots) = \sum_{m=1}^{n} l(v_m, v_j, \ldots; f^m, f^s, \ldots),$$

to je

$$a'^{s\ldots}_{j\ldots} = \sum_{m=1}^{n} a^{ms\ldots}_{mj\ldots}. \tag{4.6}$$

Tenzor $a'^{s\ldots}_{j\ldots}$*, dobijen iz* $a^{rs\ldots}_{ij\ldots}$ *po formuli (4.6), naziva se kontrakcija tenzora* $a^{rs\ldots}_{ij\ldots}$*.*

Jasno je da se kontrakcija može izvršiti po bilo kom paru gornjih i donjih indeksa. Međutim, obavezno je sumiranje po jednom kovarijantnom i jednom kontravarijantnom indeksu. Ako bi se sumiralo, na primer, po dva donja indeksa, dobijeni sistem brojeva ne bi obrazovao tenzor (jer se pri promeni bazisa ne bi transformisao po zakonu transformacije tenzora).

Primeri operacija u euklidskom prostoru

1. Kontrakcijom tenzora tipa $(1, 1)$ dobija se tenzor nultog ranga, tj. skalar, koji ne zavisi od izbora bazisa. Trag linearnog operatora A, $\mathrm{Tr}\, A = \sum_i \alpha^i_i$, (gde su α^i_i, $i = 1, \ldots, n$ dijagonalni elementi reprezentacione matrice $\mathcal{A}$ operatora A), je kontrakcija tenzora tipa $(1, 1)$.

2. Proizvod $C = AB$ linearnih operatora A i B reprezentuje se u proizvoljnom bazisu odgovarajućeg reprezentacionog prostora $\mathbb{F}^{nn}$ kao običan proizvod $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ odgovarajućih reprezentaionih matrica $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Na jeziku matričnih elemenata je $c^i_j = \sum_k a^i_k b^k_j$, gde su a^i_j, b^i_j i c^i_j elementi matrica $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, respektivno. Dakle, običan proizvod dve matrice se može shvatiti kao proizvod dva tenzora tipa $(1, 1)$, čime se dobija tenzor tipa $(2, 2)$, praćen kontrakcijom po drugom gornjem i prvom donjem indeksu, tako da se kao konačan rezultat opet dobija tenzor tipa $(1, 1)$, tj. matrica koja reprezentuje linearni operator $C = AB$.

4.3.4 Primeri

Opšti izraz za kovarijantne i kontravarijantne koordinate vektora

U n-dimenzionalnom euklidskom prostoru V skalarni proizvod je jedna bilinearna forma, a odgovarajući tenzor se naziva metrički. Budući da ova forma dva vektora iz V preslikava u realan broj, metrički tenzor $g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (v_i, v_j)$, gde je $\{v_i\}$ bazis u V, je tipa $(2,0)$. Neka je $\{f^i\}$, bazis u dualnom prostoru V^*, biortogonalan bazisu $\{v_i\}$: $f^i(v_j) = \delta^i_j$, $\forall i,j$. Metrički tenzor u dualnom prostoru V^*, definisan relacijom $g^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (f^i, f^j)$,je tipa $(0,2)$ (dva kontravarijantna vektora preslikava u skalar).

Prema Riesz-Fréchet-ovom teoremu, svakom vektoru $f \in V^*$, jednoznačno odgovara vektor $v \in V$, po dualizmu D, tako da je $f(x) = Dv(x) = (v,x)$, za svako x iz V. U slučaju euklidskog prostora D je prirodan izomorfizam (zbog bilinearnosti skalarnog proizvoda) ovih prostora. Skalarni proizvod u dualnom prostoru je indukovan skalarnim proizvodom definisanim u početnom prostoru, tj. ako je $f = Dv$ i $f' = Dv'$, onda je $(f,f') \stackrel{\text{def}}{=} (v,v')$.

Neka je $f = \sum_i \varphi_i f^i$, $f' = \sum_i \varphi_i{}' f^i$, $x = \sum_i \xi^i v_i$ i $x' = \sum_i \xi^{i'} v_i$, pri čemu je $f = Dx$ i $f' = Dx'$, tj. f i x, kao i f' i x' su parovi dualnih vektora. Tada je $(f',f) = \underline{\sum_{i,j} g^{ij}\varphi_i{}'\varphi_j} = (x',x) = \underline{\underline{\sum_{i,j} \xi^{i'}\xi^j g_{ij}}} = f'(x) = f'(\sum_i \xi^i v_i) = \sum_i \xi^i f'(v_i) = \underline{\sum_i \xi^i \varphi'_i} = (x,x') = f(x') = \underline{\underline{\sum_i \xi^{i'}\varphi_i}}$, odakle sledi $\sum_i(\sum_j g^{ij}\varphi_j)\varphi_i{}' = \sum_i \xi^i \varphi_i{}'$ i $\sum_i(\sum_j g_{ij}\xi^j)\xi^{i'} = \sum_i \varphi_i \xi^{i'}$, odnosno,

$$\xi^i = \sum_j g^{ij}\varphi_j \quad \text{i} \quad \varphi_i = \sum_j g_{ij}\xi^j,$$

pri čemu se sumira od 1 do n (do dimenzije prostora)[2].

Dakle, kontrakcijom metričkog tenzora g^{ij}, tipa $(0,2)$ i tenzora φ_j tipa $(1,0)$ (kovarijantne komponente vektora $f \in V^*$) dobija se tenzor ξ^i tipa $(0,1)$, tj. kontravarijantne komponente dualnog vektora $x = D^{-1}f$. Pošto su, kao što je ranije pokazano, § 4.1.4, u ortonormiranim biortogonalnim (dualnim) bazisima euklidskih prostora odgovarajuće kovarijantne i kontravarijantne koordinate iste (ako se x u orotnormiranom bazisu reprezentuje kolonom $\mathtt{x}$, tada se u istom bazisu njemu dualni vektor, funkcional, $f = Dx$ reprezentuje vrstom $\mathtt{x}^\dagger$), kaže se da se pomoću metričkog tenzora g^{ij} "podiže indeks", tj. prelazi se sa ko- na kontra-varijantne koordinate vektora x.

Slično, kontrakcijom metričkog tenzora g_{ij} tipa $(2,0)$ i tenzora ξ^j tipa $(0,1)$ (kontravarijantne komponente vektora $x \in V$) dobija se tenzor φ_i tipa $(1,0)$, tj. kovarijantne komponente dualnog vektora $f = Dx$. Dakle, metrički tenzor prostora V, suprotno od metričkog tenzora iz dualnog prostora, na opisani način "spušta indeks", tj. omogućava prelaz sa kontra- na ko-varijantne koordinate vektora x.

Matrice (g^{ij}) i (g_{ij})

Neka su $\{f^i\}$ i $\{v_i\}$ biortogonalni bazisi (u V^* i V, respektivno), tj. neka je $f^i(v_j) = \delta^i_j$, $\forall i,j$. Tada, po Riesz-Fréchet-u, svakom vektoru f^i jedinstveno odgovara vektor v_{f^i}, tako da

[2] Pri operacijama sa tenzorima, pored gornjih i donjih indeksa često se uvodi i tzv. *sumaciona konvencija* koja se sastoji u tome da se znak sumiranja $\sum_i$ ne piše, nego da se podrazumeva sumiranje po ponovljenom gornjem i donjem indeksu. Npr. upravo izvedene kontrakcije bi imale sledeću formu: $\xi_i = g^{ij}\varphi_j$ i $\varphi_i = g_{ij}\xi^j$.

je $(v_{f^i}, v_j) = \delta^i_j$. S druge strane, metrički tenzor u V^* se definiše preko skalarnog proizvoda bazisnih vektora, tj. $g^{ij} = (f^i, f^j)$, dok je sâm skalarni proizvod u V^* indukovan skalarnim proizvodom dualnih vektora u V: $(f^i, f^j) \stackrel{\text{def}}{=} (v_{f^i}, v_{f^j})$. Neka je $x = \sum_{i=1}^n \xi^i v_i$ proizvoljan vektor u V. Tada je $(v_{f^j}, x) = \sum_{i=1}^n \xi^i (v_{f^j}, v_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \delta^j_i = \xi^j$, pa je $x = \sum_{i=1}^n (v_{f^i}, x) v_i$. Specijalno, za $x = v_{f^j}$, dobija se $v_{f^j} = \sum_{i=1}^n (v_{f^i}, v_{f^j}) v_i = \sum_{i=1}^n (f^i, f^j) v_i = \sum_{i=1}^n g^{ij} v_i$, odakle sledi $\underline{\delta^j_k} = (v_{f^j}, v_k) = \sum_{i=1}^n g^{ij}(v_i, v_k) = \underline{\sum_{i=1}^n g^{ij} g_{ik}}$.

Dakle, matrice (g^{ij}) i (g_{ij}) su uzajamno inverzne.

Vektorski proizvod u euklidskom prostoru

Vektorski proizvod vektorâ $\vec{x} = \sum_{i=1}^3 \xi^i \vec{e}_i$ i $\vec{y} = \sum_{i=1}^3 \eta^i \vec{e}_i$ u trodimenzionalnom euklidskom prostoru dat je poznatim izrazom

$$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \end{vmatrix} = (\xi^2\eta^1 - \xi^1\eta^2)\vec{e}_1 + (\xi^3\eta^2 - \xi^2\eta^3)\vec{e}_2 + (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)\vec{e}_3.$$

Dakle, koordinate ζ^i vektora z su

$$\zeta^i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^i_{jk} \xi^j \eta^k, \tag{4.7}$$

gde je $\varepsilon^i_{jk} = \sum_{l=1}^3 g^{il} \varepsilon_{ljk}$, tenzor tipa $(2, 1)$, dobijen kontrakcijom metričkog tenzora g^{ij} i (ranije uvedenog) tenzora Levi–Civita ε_{ijk}.

Direktnom generalizacijom relacije (4.7) dobija se definicija vektorskog proizvoda $n-1$ vektora $x = \sum_i \xi^i e_i$, $y = \sum_i \eta^i e_i$, …, $w = \sum_i \omega^i e_i$, u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru:

$$z = \underbrace{x \wedge y \wedge \ldots \wedge w}_{n-1 \text{ vektora}} = \sum_{i=1}^n \zeta^i e_i, \quad \zeta^i = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} \xi^{i_1} \eta^{i_2} \ldots \omega^{i_{n-1}} \varepsilon^i_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}, \tag{4.8}$$

gde je $\varepsilon^i_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} = \sum_{l=1}^n g^{il} \varepsilon_{l i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, tenzor Levi–Civita.

Dvostruki vektorski proizvod u trodimenzionalnom euklidskom prostoru

Dvostruki vektorski proizvod $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$, gde su $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_{i=1}^3 b^i \vec{e}_i$ i $\vec{c} = \sum_{i=1}^3 c^i \vec{e}_i$ vektori iz trodimenzionalnog euklidskog prostora V, a $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ortonormiran bazis u V, izračunava se po formuli:

$$\vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Skalarni proizvodi dati relacijama $(\vec{a} \cdot \vec{c}) = \sum_{k,l} g_{kl} a^k c^l$ i $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sum_{k,l} g_{kl} a^k b^l$, a vektorski proizvod, kako je pokazano u prethodnom primeru, relacijom $\{\vec{b} \wedge \vec{c}\}^l = \sum_{m,n} \varepsilon^l_{mn} b^m c^n$. Supstitucijom ovih izraza u gornju formulu dvostrukog vektorskog proizvoda dobija se sledeći izraz:

$$\sum_{k,l} \sum_{m,n} \varepsilon^i_{kl} a^k \varepsilon^l_{mn} b^m c^n = b^i \sum_{k,l} g_{kl} a^k c^l - c^i \sum_{k,l} g_{kl} a^k b^l.$$

Dalje, smenama $b^i = \sum_m b^m \delta^i_m$, $c^i = \sum_n c^n \delta^i_n$ i prelascima $\sum_l \to \sum_n$, $\sum_l \to \sum_m$ u prvom i drugom članu desne strane, respektivno, dobija se

$$\sum_{k,l} \sum_{m,n} \varepsilon^i_{kl} \varepsilon^l_{mn} a^k b^m c^n = \sum_k \sum_{m,n} (g_{kn} \delta^i_m - g_{km} \delta^i_n) a^k b^m c^n.$$

Kako poslednja relacija važi za proizvoljne vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, dobija se relacija koja povezuje tenzor Levi–Civita i metrički tenzor:

$$\sum_l \varepsilon^i_{kl} \varepsilon^l_{mn} = g_{kn} \delta^i_m - g_{km} \delta^i_n \tag{4.9}$$

S druge strane, i-ta koordinata dvostrukog vektorskog proizvoda je

$$z^i = \sum_k \sum_{m,n} (g_{kn} \delta^i_m - g_{km} \delta^i_n) a^k b^m c^n. \tag{4.10}$$

Tenzor momenta inercije

Moment impulsa $\vec{N}$ krutog tela se definiše relacijom $\vec{N} = \int_V \vec{r} \wedge \vec{v} \, \mathrm{d}m$, gde je $\mathrm{d}m = \rho \, \mathrm{d}V$, odnosno, $N^i = \int_V \sum_{k,l} \varepsilon^i_{kl} r^k v^l \, \mathrm{d}m$ $(i = 1, 2, 3)$ [3] u datom bazisu trodimenzionalnog euklidskog prostora. Prema Euler-ovom teoremu, postoji trenutna osa rotacije tela. Ako je $\vec{\omega}$ vektor trenutne ugaone brzine, onda je $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, tj. $v^l = \sum_{p,n} \varepsilon^l_{pn} \omega^p r^n$ pa je $N^i = \int_V \sum_{k,l} \sum_{p,n} \varepsilon^i_{kl} \varepsilon^l_{pn} r^k r^n \omega^p \, \mathrm{d}m = \sum_p \omega^p \int_V \sum_{k,l,n} \varepsilon^i_{kl} \varepsilon^l_{pn} r^k r^n \, \mathrm{d}m = \sum_p \omega^p J^i_p$, gde je $J^i_p \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \sum_{k,l,n} \varepsilon^i_{kl} \varepsilon^l_{pn} r^k r^n \, \mathrm{d}m$ *tenzor momenta inercije*. Uzimajući u obzir relaciju (4.9) nalazi se $J^i_p \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \sum_{k,n} (g_{kn} \delta^i_p - g_{kp} \delta^i_n) r^k r^n \, \mathrm{d}m$, pa je $J_{ip} = \sum_s g_{is} J^s_p = \int_V \sum_s \sum_{k,n} g_{is} (g_{kn} \delta^s_p - g_{kp} \delta^s_n) r^k r^n \, \mathrm{d}m = \int_V \sum_{k,n} (g_{ip} g_{kn} - g_{in} g_{kp}) r^k r^n \, \mathrm{d}m = \int_V (g_{ip} \sum_{k,n} g_{kn} r^k r^n - \sum_n g_{in} r^n \sum_k g_{kp} r^k) \, \mathrm{d}m$. Pošto je $\sum_{k,n} g_{kn} r^k r^n = r^2$, $\sum_n g_{in} r^n = r_i$ i $\sum_k g_{kp} r^k = r_p$, konačno se dobija često korišćena formula komponenti dva puta kovarijantnog tenzora momenta inercije:

$$J_{ip} = \int_V (r^2 g_{ip} - r_i r_p) \, \mathrm{d}m. \tag{4.11}$$

Očigledno je $J_{ip} = J_{pi}$, za $i, p = 1, 2, 3$, tj. tenzor inercije je simetričan, odakle sledi da se može napisati u dijagonalnoj formi, tj. da ima svojstveni bazis. Pravci svojstvenog bazisa se zovu *glavne ose inercije*, a odgovarajuće svojstvene vrednosti *glavni momenti inercije*.

Kinetička energija tela je $T = \frac{1}{2} \int_V v^2 \, \mathrm{d}m$, odakle se, koristeći relaciju $v^i = \sum_{p,n} \varepsilon^i_{pn} \omega^p r^n$ nalazi $T = \frac{1}{2} \int_V \sum_{i,j} g_{ij} \sum_{p,n} \sum_{k,l} \varepsilon^i_{pn} \omega^p r^n \varepsilon^j_{kl} \omega^k r^l \, \mathrm{d}m = \frac{1}{2} \sum_{p,k} \omega^p \omega^k \int_V \sum_{i,j} \sum_{n,l} g_{ij} \varepsilon^i_{pn} \varepsilon^j_{pn} r^n r^l \, \mathrm{d}m$. Dakle, u proizvoljnom bazisu je

$$T = \frac{1}{2} \sum_{p,k} \omega^p \omega^k J_{pk},$$

dok je u koordinatnom sistemu glavnih osa inercije

$$T = \frac{1}{2} \sum_p J_{pp} \omega^p \omega^p.$$

[3] Telo je pričvršćeno u koordinatnom početku, $\vec{r}$ je radijus vektor proizvoljne tačke tela, $\vec{v}$ je linearna brzina u toj tački, V je zapremina tela a ρ njegova gustina.

4.4 (ANTI)SIMETRIČNI TENZORI

Definicija 4.4 *Tenzor je* simetričan *po datim indeksima ako se pri svakoj transpoziciji tih indeksa komponente tenzora ne menjaju*[4]. Antisimetričnim tenzorom *naziva se tenzor koji ima sve indekse istog tipa i koji menja znak pri transpoziciji bilo koja dva indeksa.*

Na primer, tenzor je simetričan po prva dva donja indeksa ako važi $a^{st\cdots}_{ik\ldots} = a^{st\cdots}_{ki\ldots}$, $\forall i, k$.

Metrički tenzor u euklidskom prostoru je simetričan: $g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (v_i, v_j) = (v_j, v_i) = g_{ji}$, $\forall i, j$, što je posledica simetričnosti skalarnog proizvoda u tom prostoru. Tenzor momenta inercije je takođe primer simetričnog tenzora ranga 2.

Ako je $l(x, y \ldots; f, g \ldots)$ polilinearna forma koja odgovara tenzoru $a^{st\cdots}_{ik\ldots}$, tj.

$$l(x, y \ldots; f, g \ldots) = \sum_i \sum_k \ldots \sum_s \sum_t \ldots a^{st\cdots}_{ik\ldots} \xi^i \eta^k \ldots \lambda_s \mu_t \ldots,$$

tada je simetričnost tenzora po nekoj grupi indeksa, kao što se neposredno vidi iz poslednje formule, ekvivalentna simetričnosti polilinearne forme po odgovarajućoj grupi vektora, što znači da ako su komponente tenzora simetrične u jednom bazisu, onda su one na isti način simetrične i u bilo kom drugom bazisu.

Iz definicije 4.4 direktno sledi da tenzori tipa $(p, 0)$ i $(0, q)$ mogu biti antisimetrični, kao i da pri parnim permutacijama antisimetrični tenzor ne menja znak.

Antisimetričnom tenzoru odgovara antisimetrični polilinearni funkcional. Polilinearni funkcional $l(x, y, \ldots)$ koji zavisi od p vektora $x, y, \ldots$ iz V, je antisimetričan, ako se pri transpoziciji ma koja dva vektora (od vektorâ $x, y, \ldots$) znak funkcionala menja.

Ako su komponente tenzora antisimetrične u nekom bazisu, biće antisimetrične i u bilo kom drugom bazisu.

4.4.1 Nezavisne komponente antisimetričnog tenzora

Neka je a_{ik} antisimetrični tenzor ranga 2. Tada je $a_{ik} = -a_{ki}$, $\forall i, k$ (odakle sledi $a_{ii} = 0$, $\forall i$). Prema tome, broj nezavisnih komponenti je $n(n-1)/2$, gde je n dimenzija prostora V.

Analogno, za antisimetrični tenzor a_{ijk} broj različitih komponenti je $n(n-1)(n-2)/3!$, jer su komponente sa istim indeksima jednake nuli, dok se komponente koje se međusobno razlikuju samo po redosledu indeksâ mogu izraziti jedna preko druge.

Na primer, tenzor Levi–Civita ε_{ijk}, definisan na trodimenzionalnom prostoru ($i, j, k = 1, 2, 3$), od $3^3 = 27$ komponenti ima samo jednu ($3(3-1)(3-2)/3! = 3!/3! = 1$) nezavisnu (od 6 nenultih: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$).

U opštem slučaju, broj nezavisnih komponenti antisimetričnog tenzora ranga $k \le n$ jednak je $C^k_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dakle, nenultih antisimetričnih tenzora ranga većeg od dimenzije prostora n, nema, dok antisimetrični tenzor ranga n ima samo jednu ($C^n_n = 1$) nezavisnu komponentu $a_{12\ldots n} = a$. Ako je $i_1 i_2 \ldots i_n$ proizvoljna permutacija brojeva $12 \ldots n$, tada je $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \pm a$, gde znak $+$ odgovara parnoj, a znak $-$ neparnoj permutaciji. Pri prelasku u drugi bazis broj $a = a_{12\ldots n}$ se množi determinantom matrice prelaska: Ako je $a = l(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, gde je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bazis u V, tada je

[4] Reč je isključivo o indeksima iste vrste (gornjim ili donjim).

$a' = l(v'_{i_1}, v'_{i_2}, \dots, v'_{i_n}) = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_n} \tau^{k_1}_{i_1}\tau^{k_2}_{i_2}\dots\tau^{k_n}_{i_n} a_{k_1k_2\dots k_n} = a\sum_{k_1,k_2,\dots,k_n}(-1)^{\pi(k_1k_2\dots k_n)}\tau^{k_1}_{i_1}\tau^{k_2}_{i_2}\dots\tau^{k_n}_{i_n} = a\det\mathcal{T}$, gde je $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ novi bazis dobijen iz starog matricom prelaska $\mathcal{T} = (\tau^i_j)$.

Polilinearni funkcional koji odgovara antisimetričnom tenzoru ranga n može se napisati u obliku:

$$l(\underbrace{x, y, \dots, z}_{n}) = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\dots\sum_{i_n} a(-1)^{\pi(i_1i_2\dots i_n)}\xi^{i_1}\eta^{i_2}\dots\zeta^{i_n} = a\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \dots & \zeta^n \end{vmatrix},$$

iz kog se vidi da je determinanta koordinata vektora do na konstantu jedinstvena polilinearna funkcija tipa $(n, 0)$ u n-dimenzionalnom prostoru.

4.4.2 Operacija (anti)simetrizacije

Simetrizacija

Od svakog tenzora se može operacijom simetrizacije formirati tenzor simetričan po nekoj unapred zadatoj grupi indeksa.

Neka je dat tenzor $a_{i_1i_2\dots i_n}$. Simetrizacija po prvih k indeksa se sastoji u formiranju tenzora

$$a_{(i_1i_2\dots i_k)i_{k+1}\dots} = \frac{1}{k!}\sum a_{j_1j_2\dots j_k i_{k+1}\dots},$$

gde se sumira po svim permutacijama $j_1j_2\dots j_k$ indeksa $i_1i_2\dots i_k$.

Na primer: $a_{(i_1i_2)} = \frac{1}{2}(a_{i_1i_2} + a_{i_2i_1})$.

Antisimetrizacija

Analogno operaciji simetrizacije, operacija antisimetrizacije se uvodi na sledeći način:

$$a_{[i_1i_2\dots i_k]i_{k+1}\dots} = \frac{1}{k!}\sum(-1)^{\pi(j_1j_2\dots j_k)} a_{j_1j_2\dots j_k i_{k+1}\dots},$$

gde se sumira po svim permutacijama $j_1j_2\dots j_k$ indeksa $i_1i_2\dots i_k$.

Na primer: $a_{[i_1i_2]} = \frac{1}{2}(a_{i_1i_2} - a_{i_2i_1})$.

Od k vektora ξ^{i_1}, η^{i_2}, …, ζ^{i_k}, može se formirati antisimetrični tenzor $a^{i_1i_2\dots i_k}$ antisimetrizacijom tenzora $\xi^{i_1}\eta^{i_2}\dots\zeta^{i_k}$. Komponente tog tenzora su minori k-tog reda matrice tipa $k \times n$:

$$\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n \\ \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \vdots & \zeta^n \end{pmatrix}.$$

Ako se bilo kom od vektora ξ^{i_1}, η^{i_2}, …, ζ^{i_k} doda linearna kombinacija ostalih, tenzor $a^{i_1i_2\dots i_k}$ se ne menja.

4.5 TENZORSKI PROIZVOD

Glavne primene formalizma koji je tema ovog odeljka leže izvan oblasti linearne algebre (diferencijalna geometrija, teorija reprezentacija grupa, kvantna mehanika). Kao najjednostavniji primer tenzorskog proizvoda biće prvo razmotren direktan proizvod matrica, kao pogodan model za uočavanje izvesnih specifičnosti tenzorskog u odnosu na Descartes-ov proizvod.

4.5.1 Direktan proizvod matrica

U ovom odeljku će biti definisan direktan proizvod matrica, date neke osnovne osobine tog proizvoda i na kraju, na jednom jednostavnom primeru biće razmatrane neke značajne osobine uvedenog direktnog proizvoda.

Definicija 4.5 Direktnim *ili* Kronecker-ovim proizvodom *matrice* $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ *tipa* $m \times n$ *i matrice* $\mathcal{B} = (\beta_{ij})$ *tipa* $p \times q$ *naziva se* supermatrica $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *tipa* $m \times n$ *čiji je* (i, j)*-ti element matrica* $\alpha_{ij}\mathcal{B}$ *tipa* $p \times q$*:*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\mathcal{B} & \alpha_{12}\mathcal{B} & \dots & \alpha_{1n}\mathcal{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1}\mathcal{B} & \alpha_{m2}\mathcal{B} & \dots & \alpha_{mn}\mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

Matrica $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je očigledno tipa $m \cdot p \times n \cdot q$. Njeni matrični elementi su $\alpha_{ij} \cdot \beta_{kl} \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\}_{ik,jl}$, $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, p;\ l = 1, \dots, q)$. Sa dvostrukog indeksiranja se prelazi na uobičajeno indeksiranje vrsta i kolona matrice na sledeći način: $11 \to 1,\ 12 \to 2,\ 13 \to 3, \dots,\ 1p \to p,\ 21 \to p + 1,\ 22 \to p + 2, \dots, ik \to (i - 1) \cdot p + k, \dots, mp \to m \cdot p$ i analogno $jl \to (j - 1) \cdot q + l$.

Osnovne osobine direktnog proizvoda matrica daje

Teorem 4.4

(i) $\mathrm{Tr}\,(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mathrm{Tr}\,\mathcal{A} \cdot \mathrm{Tr}\,\mathcal{B}$, *gde su* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *kvadratne matrice reda* m *i* n*.*

(ii) Asocijativnost: $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$.

(iii) Bilinearnost: $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, *gde su* $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{C}$ *matrice istog tipa;*
$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} + \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, *gde su* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *matrice istog tipa;*
$(\alpha\mathcal{A}) \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes (\alpha\mathcal{B}) = \alpha(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.

(iv) Veza direktnog i običnog množenja matrica: $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) = \mathcal{AC} \otimes \mathcal{BD}$, *gde su matrice* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{C}$ *tipa* $m \times n$ *i* $n \times p$*, a matrice* $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{D}$ *tipa* $q \times r$ *i* $r \times s$*, respektivno.*

▬ *Dokaz:* Teorem se dokazuje direktnim izračunavanjem. Na primer:

$$\mathrm{Tr}\,(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\}_{ij,ij} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ii} \sum_{j=1}^{n} \beta_{jj} = \mathrm{Tr}\,\mathcal{A} \cdot \mathrm{Tr}\,\mathcal{B}.$$

▮

Primeri

1. Direktan proizvod dve brojne kolone dužine m i n je brojna kolona dužine $m \cdot n$.

2. Direktan proizvod brojne kolone dužine m i brojne vrste dužine n je matrica tipa $m \times n$. Treba zapaziti da se ista matrica dobija i običnim množenjem matrica. S druge strane, kada se direktno pomnože vrsta i kolona dužine n opet se dobija kvadratna matrica $n \times n$, dok se običnim množenjem dobija broj.

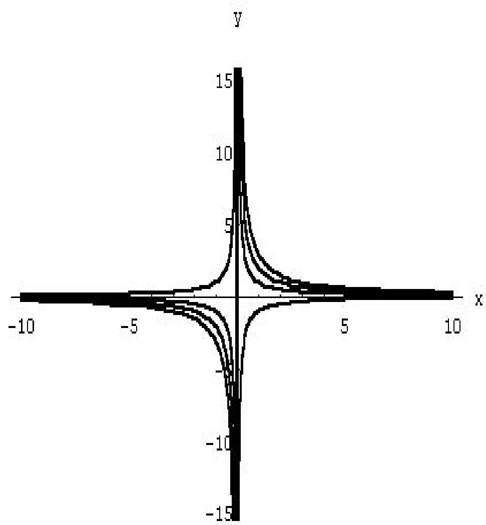
3. Direktnim množenjem vektora apsolutnih bazisa u prostorima $\mathbb{C}^2$ i $\mathbb{C}^2$, svaki sa svakim, dobija se apsolutni bazis u prostoru $\mathbb{C}^4$. Međutim, direktnim množenjem proizvoljnih vektora ovih prostora ne dobija se opšti vektor prostora $\mathbb{C}^4$. Vektori prostora $\mathbb{C}^4$ koji se mogu izraziti kao direktan proizvod vektora iz prostora $\mathbb{C}^2$ i $\mathbb{C}^2$ zovu se *nekorelisani vektori*. Ostali, za koje to ne važi, nazivaju se *korelisani vektori*. Pokazano je da su vektori apsolutnog bazisa nekorelisani, odakle neposredno sledi da se korelisani vektori mogu dobiti kao linearne kombinacije nekorelisanih, tj. da skup nekorelisanih vektora koji je pravi podskup celog prostora (kome pripada) obrazuje taj isti prostor.

   Lako se proverava da se standardni skalarni proizvod nekorelisanih vektora iz $\mathbb{C}^4$ izražava preko standardnog skalarnog proizvoda odgovarajućih vektora u $\mathbb{C}^2$ na sledeći način: $(x \otimes y, x' \otimes y') = (x, x') \cdot (y, y')$, gde su x, x', y i y' vektori (brojne kolone) iz prostorâ $\mathbb{C}^2$.

   Postavlja se pitanje da li je preslikavanje: *direktan proizvod vektora* $\rightarrow$ *nekorelisani vektor* obostrano jednoznačno ?

   Direktnim množenjem dva vektora dobija se jednoznačno, po definiciji direktnog množenja matrica, jedinstven vektor. Međutim, u drugom smeru očigledno nema jednoznačnosti. Na primer, nulti vektor u $\mathbb{C}^4$ dobija se kao rezultat direktnog množenja nultog vektora iz $\mathbb{C}^2$ sa proizvoljnim vektorom iz $\mathbb{C}^2$. Pored toga, svi parovi vektora iz prostorâ $\mathbb{C}^2$ oblika $\frac{1}{\alpha}x$ i αy, gde su x i y fiksirane brojne kolone dužine dva, dok α prolazi celo polje $\mathbb{C}$, u direktnom proizvodu daju isti nekorelisani vektor $x \otimes y$.

4. Ovde će poslednje zapažanje iz prethodnog primera biti ilustrovano na jednodimenzionalnom slučaju direktnog proizvoda vektora (realnih brojeva) iz prostorâ $\mathbb{R}$. Treba zapaziti da rezultat ovog direktnog proizvoda (nekorelisani vektor) takođe pripada prostoru $\mathbb{R}$, kao i da su svi vektori iz $\mathbb{R}$ nekorelisani (npr. $1 \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$). Svi parovi vektora oblika $x = \frac{1}{\alpha}a$ i $y = \alpha b$ (gde su a i b fiksirani vektori iz $\mathbb{R}$, dok α prolazi celo polje $\mathbb{R}$) u direktnom proizvodu daju isti vektor $x \otimes y = ab$. Grafički je to prikazano na slici 4.1. Obe grane istostrane hiperbole $xy = ab$ u direktnom proizvodu daju jedan isti nekorelisani vektor $ab = a \otimes b$. Grane hiperbole $xy = -ab$ daće nekorelisani vektor $-ab$, dok će se asimptote ovih hiperbola (koordinatne ose) preslikati u nulu (nulti vektor). Drugim rečima, ravan sa slike 4.1 koja reprezentuje Descartes-ov proizvod $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se razbija na klase ekvivalencije uređenih parova (x, y) (elemenata Descartes-ovog proizvoda) reprezentovane hiperbolama $xy = ab$, $xy = -ab$ i njihovim asimptotama $xy = 0$ (koordinatne ose), gde $ab \in \mathbb{R}$, prebrojava te klase. Svaka klasa daje jedan vektor u $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$.



Slika 4.1: *Direktni proizvod $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ i Descartes-ov proizvod $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Dok je Descartes-ov proizvod $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ reprezentovan celom ravni, vektorski prostor $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ je reprezentovan po jednom tačkom sa svake hiperbole i koordinatnim početkom (ili bilo kojom drugom tačkom sa koordinatnih osa).*

4.5.2 Tenzorski proizvod $V \otimes V$

Ovde će biti pokazano da se bilinearni funkcionali mogu interpretirati kao linearni funkcionali u nekom novom prostoru. Taj prostor se zove tenzorski proizvod prostora V i V (ili tenzorski kvadrat prostora V) i označava se sa $V\otimes V$ ili V^2.

Neka je dat skup svih mogućih uređenih parova x i y vektora iz V. Svaki takav par se zove *tenzorski proizvod* vektora x i y i označava sa $x\otimes y$. Neka su izrazom

$$X = x_1\otimes y_1 + x_2\otimes y_2 + \ldots + x_k\otimes y_k. \tag{4.12}$$

definisane formalne konačne sume takvih parova. Pri tome, formalne sume koje se razlikuju samo po poretku članova, su, po definiciji, jednake. Dakle, zapis (4.12) označava samo to da je dat skup od k parova x_1, y_1; $\ldots$; x_k, y_k.

Sledećim relacijama se uvode, za izraze oblika (4.12) operacije sabiranja i množenja skalarom:

$$(x_1\otimes y_1+\ldots+x_k\otimes y_k)+(x_{k+1}\otimes y_{k+1}+\ldots+x_{k+l}\otimes y_{k+l}) = x_1\otimes y_1+\ldots+x_{k+l}\otimes y_{k+l}, \tag{4.13}$$

$$\lambda(x_1\otimes y_1+\ldots+x_k\otimes y_k) = (\lambda x_1)\otimes y_1+\ldots+(\lambda x_k)\otimes y_k. \tag{4.14}$$

Vektor $0\otimes 0$ se zove *nula* tenzorskog proizvoda i označava sa 0.

Relacije koje slede definišu koje izraze tipa (4.12) treba smatrati međusobno jednakima:

1. $(x_1+x_2)\otimes y + (-x_1)\otimes y + (-x_2)\otimes y = 0$;

2. $x\otimes(y_1+y_2) + (-x)\otimes y_1 + (-x)\otimes y_2 = 0$;

3. $(\lambda x)\otimes y + (-x)\otimes(\lambda y) = 0$.

Pored toga, *jednak nuli je i svaki izraz koji je linearna kombinacija gore navedena tri izraza.*

Iz ovih uslova očigledno sledi : $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$; $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$; $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$, tj. u tenzorskom proizvodu je moguće osloboditi se zagrada po običnom pravilu: $(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \otimes (\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_k x_k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \mu_j (x_i \otimes x_j)$.

Dakle, dva izraza X i X' tipa (4.12) su jednaka ako ih je moguće izjednačiti dodajući im izraze koji su jednaki nuli, tj. ako postoje takvi izrazi $Z = 0$ i $Z' = 0$ da se $X + Z$ i $X' + Z'$ međusobno poklapaju.

Očigledno je da je uvedena relacija jednakosti refleksivna ($X = X$) i simetrična (iz $X = Y$ sledi $Y = X$). Lako se proverava i tranzitivnost (iz $X = Y$ i $Y = Z$ sledi $X = Z$).

Na upravo opisan način konstruisan je jedan vektorski prostor. Vektori iz tog prostora su klase međusobno jednakih izraza tipa (4.12). Pravljenje linearnih kombinacija definisano je relacijama (4.13) i (4.14).

Definicija 4.6 Tenzorski proizvod $V \otimes V$ *je vektorski prostor čiji elementi su formalni izrazi oblika $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \ldots + x_k \otimes y_k$, gde su x_i, y_i vektori prostora V. Preciznije, vektori prostora $V \otimes V$ su klase međusobno jednakih izraza oblika $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \ldots + x_k \otimes y_k$ (uslovi jednakosti su gore dati). Sabiranje vektora iz $V \otimes V$ i množenje skalarom je definisano relacijama (4.13) i (4.14).*

Dimenzija prostora $V \otimes V$

Neka je dat bazis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ u prostoru V i neka su $x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i v_i$ i $y = \sum_{i=1}^{n} \eta^i v_i$ proizvoljni vektori iz V. Tada je

$$x \otimes y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi^i \eta^j \, (v_i \otimes v_j).$$

Dakle, proizvoljan vektor iz $V \otimes V$ je linearna kombinacija n^2 vektora $v_i \otimes v_j$. Pored toga, vektori $v_i \otimes v_j$, $(i, j = 1, \ldots, n)$ su linearno nezavisni (dokaz linearne nezavisnosti se ovde neće navoditi). Prema tome, *vektorski prostor $V \otimes V$ je n^2 dimenzionalan, gde je n dimenzija prostora V.*

Veza između bilinearne forme na V i linearnih funkcionala na $V \otimes V$

Neka je data bilinearna forma $f(x, y)$ na V. Može se definisati odgovarajući linearni funkcional $F(X)$ na $V \otimes V$ na sledeći način. Za vektor $x \otimes y$ neka je

$$F(x \otimes y) = f(x, y),$$

a za proizvoljan vektor $X = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k$ je

$$F(X) = f(x_1, y_1) + \ldots + f(x_k, y_k).$$

Da bi definicija funkcionala $F(X)$ bila korektna, neophodno je da na klasama međusobno jednakih izraza tipa $x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k$ funkcional F ima iste vrednosti. Lako se pokazuje da je to ispunjeno (dovoljno je pokazati da je $F(X) = 0$ na izrazima tipa 1. – 3.).

Očigledna je linearnost funkcionala F, formiranog pomoću forme $f(x, y)$, na $V \otimes V$ (tj. $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$ i $F(\lambda X) = \lambda F(X)$). I obratno, ako je F linearan na $V \otimes V$ onda njemu odgovara bilinearna forma na V: $f(x, y) = F(x \otimes y)$.

Uspostavljena bijekcija je linearna, tj. ako bilinearnim formama f' i f'' odgovaraju linearni funkcionali F' i F'', onda linearne kombinacije $\alpha f' + \beta f''$ odgovaraju funkcionalu $\alpha F' + \beta F''$.

Dakle, uspostavljen je izomorfizam između prostora bilinearnih formi na V i prostora $(V \otimes V)^*$ linearnih funkcionala na $V \otimes V$.

4.5.3 Tenzorski proizvod $V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$

U definiciji proizvoda $V \otimes V$ nigde nije iskorišćena činjenica da su vektori x i y u direktnom proizvodu $x \otimes y$ iz istog prostora. Dakle, doslovnim ponavljanjem gore date definicije za $V \otimes V$ može se definisati tenzorski proizvod $V_1 \otimes V_2$ dva različita prostora V_1 i V_2 nad istim poljem.

Ako je $\{v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}\}$ bazis u V_1, a $\{v_1^{(2)}, \ldots, v_{n_2}^{(2)}\}$ bazis u V_2, tada $n_1 n_2$ vektora $v_i^{(1)} \otimes v_j^{(2)}$, $(i = 1, \ldots, n_1;\ j = 1, \ldots, n_2)$ čini bazis u $V_1 \otimes V_2$.

Treba zapaziti da se prostori $V_1 \otimes V_2$ i $V_2 \otimes V_1$ razlikuju po definiciji.

Analogno se definiše tenzorski proizvod više prostora. Na primer, vektori tenzorskog proizvoda $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ su formalne sume

$$x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 + \ldots + x_k \otimes y_k \otimes z_k,$$

gde su x_i, y_i i z_i vektori iz V_1, V_2 i V_3, respektivno. Operacije sabiranja i množenja skalarom definišu se na isti način kao i u slučaju tenzorskog proizvoda dva prostora.

Tenzorski proizvod m vektorskih prostora $V_1, \ldots, V_m$ se često obeležava sa $\otimes_{i=1}^m V_i$. U slučaju kada su svi faktori V_i u proizvodu jednaki istom prostoru V njihov tenzorski proizvod se naziva m-ti tenzorski stepen prostora V i označava se sa V^m.

4.5.4 Veza između tenzora i vektora iz tenzorskog proizvoda prostora

Ovde će biti pokazano da se svaki tenzor prostora V može videti kao vektor nekog tenzorskog proizvoda prostorâ V i V^*.

Tenzor ranga dva, dva puta kovarijantan zadaje se bilinearnom formom na V. Međutim, kako je ranije pokazano § 4.5.2, između bilinearne forme na V i linearnog funkcionala na $V \otimes V$ postoji bijekcija. Dakle, svaki tenzor ranga dva, tipa $(2, 0)$ se može razmatrati kao linearni funkcional na $V \otimes V$, tj. kao vektor iz $(V \otimes V)^*$.

S druge strane, postoji prirodni izomorfizam[5] $(V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$. Na taj način, može se svaki tenzor tipa $(2, 0)$ razmatrati kao vektor iz tenzorskog proizvoda $V^* \otimes V^*$.

Na sličan način može se doći do zaključka da se tenzori tipa $(0, 2)$ mogu smatrati vektorima iz prostora $(V^* \otimes V^*)^* \cong V \otimes V$.

U opštem slučaju, proizvoljnom tenzoru $a_{ij\ldots}^{rs\ldots}$ tipa (p, q) bijektivno odgovara polilinearni funkcional $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ na V koji je opet, sa svoje strane, u bijektivnoj relaciji sa linearnim funkcionalom na tenzorskom proizvodu $\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ puta}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q \text{ puta}}$, tj. $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots) = F(x \otimes y \otimes \ldots \otimes f \otimes g \otimes \ldots)$. Dakle, tenzor ranga $p+q$, p puta kovarijantan i q puta kontravarijantan

[5] Neka je $F \in V^* \otimes V^*$, tj. $F = f^1 \otimes g^1 + \ldots + f^l \otimes g^l$, gde su f^i, g^i linearni funkcionali na V. Da bi se uspostavio traženi izomorfizam treba definisati linearni funkcional na $V \otimes V$ na sledeći način: $F(x \otimes y) = f^1(x)g^1(y) + \ldots + f^l(x)g^l(y)$, $F(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = F(x_1 \otimes y_1) + \ldots + F(x_k \otimes y_k)$.

se može smatrati linearnim funkcionalom na $\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{p\text{ puta}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{q\text{ puta}}$, odnosno vektorom iz prostora $(\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{p\text{ puta}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{q\text{ puta}})^*\cong\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{p\text{ puta}}\otimes\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{q\text{ puta}}$.

4.5.5 Tenzorski proizvod linearnih operatora

Definicija 4.7 Tenzorski proizvod linearnih operatora $A\in\hat{L}(V_1,V_1)$ *i* $B\in\hat{L}(V_2,V_2)$ *je linearni operator* $C=A\otimes B\in\hat{L}(V_1\otimes V_2,V_1\otimes V_2)$ *čije je delovanje na vektore* $x_i\otimes y_i$ *iz prostora* $V_1\otimes V_2$ *je definisano na sledeći način:*

$$C(x_1\otimes y_1+\ldots+x_k\otimes y_k)=(Ax_1)\otimes(By_1)+\ldots+(Ax_k)\otimes(By_k).$$

Potpuno analogno se definiše i nešto opštiji slučaj tenzorskog proizvoda linearnih operatora $A\in\hat{L}(V_1,W_1)$ i $B\in\hat{L}(V_2,W_2)$. Tada je $C=A\otimes B\in\hat{L}(V_1\otimes V_2,W_1\otimes W_2)$, a delovanje operatora C je indukovano delovanjem operatora A i B u prostorima V_1 i V_2.

Lako se pokazuje da je reprezentaciona matrica $\mathcal{C}$ linearnog operatora $C=A\otimes B$ direktan (Kronecker-ov) proizvod reprezentacionih matrica $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ operatora A i B, tj. $\mathcal{C}=\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ u smislu definicije 4.5.

4.5.6 Tenzorski proizvod unitarnih prostora

Neka je U_1 unitarni prostor sa skalarnim proizvodom $(x,x')_1$, a U_2 drugi unitarni prostor sa skalarnim proizvodom $(y,y')_2$. Tada se u tenzorskom proizvodu prostora $U_1\otimes U_2$ može uvesti skalarni proizvod na prirodan način:

1. Za par vektora $x\otimes y$ i $x'\otimes y'$:

$$(x\otimes y,\,x'\otimes y')\stackrel{\text{def}}{=}(x,x')_1\cdot(y,y')_2;$$

2. Ako je $X=x_1\otimes y_1+\ldots+x_k\otimes y_k$ i $X'=x'_1\otimes y'_1+\ldots+x'_l\otimes y'_l$ par proizvoljnih vektora iz $U_1\otimes U_2$ tada je

$$(X,X')\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(x_i\otimes y_i,\,x'_j\otimes y'_j).$$

Prostor $U_1\otimes U_2$ sa ovako uvedenim skalarnim proizvodom se naziva *tenzorskim proizvodom unitarnih prostora* U_1 *i* U_2.

Treba zapaziti da ako su $\{u_1^{(1)},\ldots,u_{n_1}^{(1)}\}$ i $\{u_1^{(2)},\ldots,u_{n_2}^{(2)}\}$ ortonormirani bazisi u prostorima U_1 i U_2, vektori $u_i^{(1)}\otimes u_j^{(2)}$, $(i=1,\ldots,n_1;\ j=1,\ldots,n_2)$ obrazuju ortonormirani bazis u $U_1\otimes U_2$. Naime,

$$(u_i^{(1)}\otimes u_j^{(2)},\,u_{i'}^{(1)}\otimes u_{j'}^{(2)})=(u_i^{(1)},u_{i'}^{(1)})_1\cdot(u_j^{(2)},u_{j'}^{(2)})_2=\delta_{ii'}\delta_{jj'}.$$

4.5.7 Simetrični i spoljašnji kvadrat vektorskih prostora

Simetrični kvadrat $S^2(V)$ vektorskog prostora V pored aksioma običnog kvadrata V^2 prostora V (odeljak 4.5.2) zadovoljava i aksiom: $x \otimes y - y \otimes x = 0$, $\forall x, y \in V$.

Spoljašnji kvadrat $\bigwedge^2 V \equiv V \bigwedge V$ vektorskog prostora V, uz aksiome običnog kvadrata V^2 prostora V, zadovoljava i aksiom: $x \otimes x = 0$, $\forall x \in V$. Izraz $x \otimes y \in V \bigwedge V$ se označava sa $x \bigwedge y$

Lako se pokazuje da su $S^2(V)$ i $V \bigwedge V$ vektorski prostori, kao i da je $\dim S^2(V) = n(n+1)/2$ i $\dim V \bigwedge V = n(n-1)/2$, gde je $n = \dim V$. Naime, ako je $\{v_1, \dots, v_n\}$ bazis u V, tada je $\{v_i \otimes v_j \,|\, i \leq j\}$ bazis u $S^2(V)$, a $\{v_i \bigwedge v_j \,|\, i < j\}$ bazis u $V \bigwedge V$.

Lema 4.1 *U prostoru $V \bigwedge V$ važi $x \otimes y + y \otimes x = 0$, za svako x i y iz V.*

▬ *Dokaz:* $x \otimes y + y \otimes x = (x + y) \otimes (x + y) - x \otimes x - y \otimes y = 0$. ▮

Ova lema izražava antisimetričnost spoljašnjeg proizvoda vektora: $x \bigwedge y = -y \bigwedge x$.

Prostori $S^2(V)$ i $V \bigwedge V$ se mogu definisati i kao potprostori prostora $V \otimes V$. Naime, u $V \otimes V$ postoje potprostori izomorfni prostorima $S^2(V)$ i $V \bigwedge V$.

Neka je u prostoru $V \otimes V$ zadat linearni operator A sledećom relacijom:

$$A(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = y_1 \otimes x_1 + \ldots + y_k \otimes x_k.$$

Očigledno je A *involucija* na $V \otimes V$, tj. $A^2 = I_{V \otimes V}$. Pored toga, nije teško proveriti, da svi vektori $X \in V \otimes V$ koji su invarijantni pod delovanjem operatora A, tj. koji zadovoljavaju relaciju $AX = X$, obrazuju potprostor W_1 u $V \otimes V$. Slično, svi vektori $Y \in V \otimes V$, koji zadovoljavaju relaciju $AY = -Y$, obrazuju potprostor W_2 u $V \otimes V$. Pri tome je $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, jer iz $AX = X$ i $AX = -X$ sledi $X = 0$. Dalje, proizvoljan vektor X iz $V \otimes V$ se može napisati u obliku $X = X_1 + X_2$, gde je $X_1 = \frac{1}{2}(X + AX)$, a $X_2 = \frac{1}{2}(X - AX)$. Očigledno je $AX_1 = X_1$ i $AX_2 = -X_2$, tj. $X_1 \in W_1$, a $X_2 \in W_2$. Dakle, potprostori W_1 i W_2 u direktnoj sumi daju celi prostor $V \otimes V$.

Pri preslikavanju prostora $V \otimes V$ na prostor $S^2(V)$ u nulu se preslikavaju svi vektori iz W_2 i to samo oni: Neka se $X \in V \otimes V$ preslikava u nulu. Tada je X linearna kombinacija vektorâ oblika $x \otimes y - y \otimes x$. Prema tome, $AX = -X$, tj. $X \in W_2$. Obratno, neka je $X \in W_2$, tj. $AX = -X$. Tada je $X = \frac{1}{2}(X - AX)$, pa je X jednako linearnoj kombinaciji oblika $x \otimes y - y \otimes x$. Pošto je $V \otimes V = W_1 \oplus W_2$, ovim je dokazano da se pri preslikavanju $V \otimes V$ na $S^2(V)$, potprostor W_1 izomorfno preslikava na $S^2(V)$.

Analogno se može uspostaviti izomorfizam između prostora $V \bigwedge V$ i potprostora $W_2 < V \otimes V$, vektora X za koje važi $AX = -X$.

4.5.8 Simetrični stepen $S^m(V)$

Vektori prostora $\otimes^m V$ su formalne linearne kombinacije elemenata oblika $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$, gde je $x_i \in V$, pri čemu se neke od tih suma smatraju međusobno jednakima (odeljak 4.5.3). Dodatni uslov, međusobno izjednačavanje svih izraza oblika $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$ koji se razlikuju do na redosled množitelja, definiše *simetrični m-ti stepen prostora V* i označava se sa $S^m(V)$.

Ako je $\{v_1, \dots, v_n\}$ bazis u prostoru V, tada je $\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_m} \,|\, i_1 \leq \ldots \leq i_m\}$ bazis u prostoru $S^m(V)$ i $\dim S^m(V) = C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$.

4.5.9 Spoljašnji stepen $\bigwedge^m V$

Vektori prostora $\otimes^m V$ su formalne linearne kombinacije elemenata oblika $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$, gde je $x_i \in V$, pri čemu se neke od tih suma smatraju međusobno jednakima (odeljak 4.5.3). Dodatni uslov, izjednačavanje s nulom svih izraza oblika $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$ kod kojih su bar dva faktora u proizvodu jednaka, kao i bilo koje linearne kombinacije takvih izraza, definiše *spoljašnji m-ti stepen prostora* V i označava se sa $\bigwedge^m V$. Izraz $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m \in \bigwedge^m V$, naziva se spoljašnji proizvod vektora $x_1, x_2, \ldots, x_m$ i označava se sa $x_1 \bigwedge x_2 \bigwedge \ldots \bigwedge x_m$.

Spoljašnji proizvod vektora je antisimetričan, tj. menja znak pri permutaciji ma koja dva množitelja.

Među spoljašnjim stepenima prostora V konačan broj je nenultih. Naime, $\bigwedge^m V = \{0\}$, za $m > n$, gde je n dimenzija prostora V, što se lako pokazuje. Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bazis u V. Svaki vektor $x_1 \bigwedge \ldots \bigwedge x_m \in \bigwedge^m V$ može predstaviti kao linearna kombinacija vektora $B = \{v_{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge v_{i_m} \,|\, i_1, \ldots, i_m = 1, \ldots, n\}$. Ako je $m > n$ onda su najmnaje dva množitelja u svakom izrazu oblika $v_{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge v_{i_m}$ jednaka, tako da je $B = \{0\}$, tj. $\bigwedge^m V = \{0\}$ za $m > n$.

Prostor $\bigwedge^n V$, gde je $n = \dim V$ je jednodimenzionalan. Među vektorima $v_{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge v_{i_n}$ različiti su od nule samo oni kod kojih se svi indeksi $i_1, \ldots, i_n$ razlikuju međusobno, tj. čine neku permutaciju brojeva $1, \ldots, n$. Kako je spoljašnji proizvod vektora antisimetričan, to se nenulti vektori, do na znak, poklapaju sa $v_{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge v_{i_n}$, odnosno, proizvoljan vektor iz $\bigwedge^n V$ je proporcionalan vektoru $v_1 \bigwedge \ldots \bigwedge v_n$.

Lako se pokazuje, da ako je $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ novi bazis u V, dobijen iz starog matricom prelaska $\mathcal{T} = (\tau^i_j)$: $v'_i = \sum_{j=1}^n \tau^j_i v_j$, tada je $v'_1 \bigwedge \ldots \bigwedge v'_n = \det \mathcal{T} v_1 \bigwedge \ldots \bigwedge v_n$.

U opštem slučaju, ako je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bazis prostora V, tada je $\{v_{i_1} \bigwedge \ldots \bigwedge v_{i_m} \,|\, i_1 < \ldots < i_m\}$ bazis prostora $\bigwedge^m V$ i $\dim \bigwedge^m V = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

4.5.10 Tenzorski proizvod u kvantnoj mehanici

Složeni sistem

Ako su $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m$, prostori stanja m kvantnih sistema, tada je, prema jednom od postulata kvantne mehanike, prostor stanja sistema dobijenog njihovim objedinjavanjem, pravi potprostor $\mathcal{H} < \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_m$ tenzorskog proizvoda tih prostora (u slučaju nerazličivih — identičnih čestica), odnosno ceo prostor $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_m$ (u ostalim slučajevima).

Neka je $\psi_i \in \mathcal{H}_i$ neko stanje i-tog podsistema. Nekorelisani vektor $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_m$ je jedno od mogućih stanja objedinjenog (složenog) sistema. Ono odgovara slučaju kada se svaki od podsistema nalazi u *svom* stanju ψ_i. Međutim, nekorelisani vektori ne iscrpljuju sve vektore u prostoru $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_m$: dozvoljene su i njihove linearne kombinacije — korelisana stanja složenog sistema. Kada se sistem nalazi u korelisanom stanju, pojam stanja podsistema gubi dosadašnji smisao.

U najjednostavnijem slučaju složenog sistema, bez interakcije među podsistemima, hamiltonijan je oblika

$$H = H_1 \otimes I \otimes \ldots \otimes I + I \otimes H_2 \otimes I \otimes \ldots \otimes I + \ldots + I \otimes \ldots \otimes I \otimes H_m,$$

gde je $H_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, hamiltonijan i-tog podsistema, a I jedinični operator. U datom slučaju, ako se u početnom trenutku sistem nalazio u nekorelisanom stanju $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_m$, tada će se, u bilo kom trenutku t nalaziti u nekorelisanom stanju $e^{-\imath tH_1}\psi_1 \otimes \ldots \otimes e^{-\imath tH_m}\psi_m$, tj. podsistemi će evoluirati nezavisno jedan od drugog.

U opštem slučaju, hamiltonijan složenog sistema je suma slobodnog (neinteragujućeg) člana i operatora odgovornog za interakciju. Na primer, hamiltonijan složenog elektron-jon sistema u kristalu je $H = T_{\text{ion}}\otimes I_{\text{el}} + V_{\text{ion}}\otimes I_{\text{el}} + I_{\text{ion}}\otimes T_{\text{el}} + I_{\text{ion}}\otimes V_{\text{el}} + V_{\text{ion}-\text{el}}$, gde su T_{ion} i T_{el} operatori kinetičke energije, V_{ion} i V_{el}, operatori potencijalne energije jonskog i elektronskog podsistema, respektivno, dok je $V_{\text{ion}-\text{el}}$ operator interakcije dva podsistema koji deluje u prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\text{ion}} \otimes \mathcal{H}^{\text{el}}$. Sa I_{ion} i I_{el} su označeni identični operatori u prostorima $\mathcal{H}^{\text{ion}}$ i $\mathcal{H}^{\text{el}}$.

Identične čestice

U slučaju sistema identičnih čestica, tj. kada je $\mathcal{H}_1 = \ldots = \mathcal{H}_m \equiv \mathcal{H}$, prostor stanja objedinjenog sistema je pravi potprostor prostora $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_m$.

1. *Bozoni.* Po definiciji, sistem s prostorom stanja $\mathcal{H}$ je bozon, ako je prostor stanja m takvih objedinjenih sistema m-ti simetrični stepen $S^m(\mathcal{H})$ prostora $\mathcal{H}$. (Fotoni i alfa čestice, tj. jezgra helijuma su bozoni.)

2. *Fermioni.* Po definiciji, sistem s prostorom stanja $\mathcal{H}$ je fermion, ako je prostor stanja m takvih objedinjenih sistema m-ti spoljašnji stepen $\bigwedge^m \mathcal{H}$ prostora $\mathcal{H}$. (Elektroni, protoni i neutroni su fermioni.)

Promenljivi broj čestica

U toku evolucije kvantnog sistema koji se sastoji od čestica (kao elementarnih podsistema) moguće je nastajenje novih, *kreacija*, ili nestajanje postojećih čestica, *anihilacija*. Takve pojave u bozonskom i fermionskom slučaju opisuju se u odgovarajućim prostorima stanja: $\oplus_{i=0}^{\infty} S^i(\mathcal{H})$ ili $\oplus_{i=0}^{\infty} \bigwedge^i(\mathcal{H})$, tzv. Fock-ovim prostorima za bozone i fermione, respektivno.

4.5.11 Dirac-ova notacija, dijade i dijadska reprezentacija operatora

U osnovi Dirac-ove notacije je Riesz-Fréchet-ov teorem, koji za unitarne i euklidske prostore pruža mogućnost definisanja međusobno dualnih vektora, kao i činjenica da se u *istom* ortonormiranom bazisu unitarnog (euklidskog) prostora V vektor $x \in V$ i njegov dualni $Dx = f \in V^*$ reprezentuju kolonom $\mathtt{x} \in \mathbb{F}^n$ i vrstom $\mathtt{x}^\dagger \in \mathbb{F}^{1n}$, respektivno, i da se, takođe u *istom* ortonormiranom bazisu prostora V, međusobno dualni operatori $A \in \hat{L}(V,V)$ i $A^* = DAD^{-1} \in \hat{L}(V^*,V^*)$ reprezentuju takođe međusobno adjungovanim matricama, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^\dagger$, respektivno.

Tako se vektor $x \in V$ u Dirac-ovoj notaciji obeležava sa $|\ x\,\rangle$ i naziva *ket*, dok se njegov dualni $Dx \in V^*$ obeležava sa $\langle\, x\ |$ i zove se *bra*. Sâmi nazivi "bra" i "ket" potiču od engleske reči "bra**c**ket" (zagrada): $\langle$ bra $|$ ket $\rangle$. U uvedenoj notaciji, skalarni proizvod (x,y) vektora $x,y \in V$ postaje $\langle\, x \mid y\,\rangle$.

Pored ovoga, Dirac-ova notacija koristi izomorfizam $\hat{L}(V,V) \cong V \otimes V^*$: Operator A koji deluje na prostoru V može se videti i kao vektor u prostoru $V \otimes V^*$. Neka je $\{|\ v_1\,\rangle, \ldots, |\ v_n\,\rangle\}$, ortonormiran bazis u prostoru V. Tada je $\{\langle\, v_1\ |, \ldots, \langle\, v_n\ |\}$, njemu dualni bazis (takođe ortonormiran u odnosu na indukovani skalarni proizvod) u prostoru V^*, a $\{|\ v_i\,\rangle\langle\, v_j\ | \mid i,j = 1,\ldots,n\}$ bazis u prostoru $V \otimes V^*$. Operator A, kao vektor u $V \otimes V^*$ je linearna kombinacija bazisnih vektora: $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \mid v_i \rangle\langle v_j \mid$. Iz ovakvog oblika operatora A očigledno je da on može delovati na desno, na vektor $\mid x \rangle$ iz V, ali i na levo na njemu dualni vektor $\langle x \mid$ iz V^*: $A \mid x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \langle v_j \mid x \rangle \mid v_i \rangle \in V$; $\langle x \mid A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_j \mid \alpha_{ij} \langle x \mid v_i \rangle \in V^*$.

Skalarni proizvod $(x, Ay) = (A^\dagger x, y)$ se u Dirac-ovoj notaciji piše u obliku $\langle x \mid A \mid y \rangle$, pri čemu operator A na levo deluje kao adjungovani $A^\dagger$.

Tenzorski proizvod vektora x i njegovog dualnog Dx je $x \otimes Dx = \mid x \rangle\langle x \mid$. Generalno, Dirac-ova notacija omogućava lakšu vizuelnu analizu komplikovanijih izraza: $\langle \ldots \rangle$ je skalar, $\mid \ldots \mid$ je operator, $\mid \ \rangle$ je vektor iz razmatranog prostora, dok je $\langle \ \mid$ vektor iz dualnog prostora. Pri tome se odgovarajući, međusobno dualni objekti označavaju istim slovom.

Nekorelisani vektori $\mid x \rangle\langle y \mid$ iz $V \otimes V^*$ nazivaju se *dijade*.

Neka je $\{\mid v_1 \rangle, \ldots, \mid v_n \rangle\}$ ortonormiran bazis u V. Njemu dulani bazis je $\{\langle v_1 \mid, \ldots, \langle v_n \mid\}$, dok je $\{\mid v_i \rangle\langle v_j \mid \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ Weyl-ov bazis u prostoru $V \otimes V^*$. Jedinični operator prostora V se može predstaviti u obliku

$$I_V = \sum_{i=1}^n \mid v_i \rangle\langle v_i \mid,$$

gde su $\mid v_i \rangle\langle v_i \mid$ projektori na pravce $L(\mid v_i \rangle)$. Projektor na pravac $L(\mid x \rangle)$ određen proizvoljnim nenultim vektorom $\mid x \rangle \in V$ je

$$P_{\mid x \rangle} = \frac{\mid x \rangle\langle x \mid}{\langle x \mid x \rangle}.$$

Operator A se može napisati u obliku $A = I_V A I_V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mid v_i \rangle\langle v_i \mid A \mid v_j \rangle\langle v_j \mid = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \mid v_i \rangle\langle v_j \mid$. Na taj način je dobijen *operatorski* ili *dijadski oblik osnovne formule reprezentovanja*:

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \mid v_i \rangle\langle v_j \mid .$$

Kada je $\{\mid v_1 \rangle, \ldots, \mid v_n \rangle\}$ svojstveni bazis operatora A, tj. $A \mid v_i \rangle = \lambda_i \mid v_i \rangle$, $\forall i$, tada se poslednja formula svodi na oblik $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mid v_i \rangle\langle v_i \mid$.

Konačno, dijada adjungovana dijadi $\mid x \rangle\langle y \mid$ je $\mid y \rangle\langle x \mid$, dok je standardni skalarni proizvod dijadâ:

$$(\mid x \rangle\langle y \mid, \mid z \rangle\langle w \mid) = \mathrm{Tr}\,\{(\mid x \rangle\langle y \mid)^\dagger \mid z \rangle\langle w \mid\} = \langle x \mid z \rangle \mathrm{Tr}\,(\mid y \rangle\langle w \mid) = \langle x \mid z \rangle\langle y \mid w \rangle.$$

Glava 5

VEKTORSKA ANALIZA

5.1 INVARIJANTE OPERATORA

Pri proučavanju svojstvenog problema uočene su određene invarijante (npr. trag operatora). *Invarijante* su izrazi koji ne zavise od izbora bazisa. Ovde će biti razmotrene invarijante linearnih operatora koji deluju u euklidskom prostoru.

Neka je A linearan operator koji deluje u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru V i neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bazis u V, a $\{f^1, \ldots, f^n\}$ odgovarajući biortogonalan bazis u V^*.

Prvo će biti pokazano da je izraz

$$\sum_{i=1}^{n} f^i A v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i A f^i$$

invarijanta[1].

Neka je $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ novi bazis u V, dobijen iz starog matricom prelaska $\mathcal{T} = (\tau^i_j)$, a $\{f'^1, \ldots, f'^n\}$ njemu biortogonalan bazis: $f'^i = \mathcal{S} f^i = \sum_{j=1}^n \sigma^i_j f^j$, gde je $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{-1}$. Tada je $\underline{\sum_{i=1}^n f'^i A v'_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sigma^i_k f^k A \sum_{l=1}^n \tau^l_i v_l = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tau^l_i \sigma^i_k f^k A v_l = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta^l_k f^k A v_l = \underline{\sum_{k=1}^n f^k A v_k}$.

Invarijanta $\sum_{k=1}^n f^k A v_k$ linearnog operatora A zove se *divergencija* operatora A i označava se sa $\operatorname{div} A$. Dakle,

$$\operatorname{div} A = \sum_{k=1}^{n} f^k A v_k = \sum_{k=1}^{n} v_k A f^k.$$

U datom bazisu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ operator A se reprezentuje matricom $\mathcal{A} = (\alpha^i_j)$: $A v_i = \sum_{j=1}^n \alpha^j_i v_j$. Tada je $\operatorname{div} A = \sum_{k=1}^n f^k A v_k = \sum_{k=1}^n f^k \sum_{j=1}^n \alpha^j_k v_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha^j_k f^k(v_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha^j_k \delta^k_j = \sum_{k=1}^n \alpha^k_k = \operatorname{Tr} A$.

Kada je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormiran bazis, tada je $\alpha^i_j = (v_i, A v_j)$, pa u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, u Descartes-ovom bazisu $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$, divergencija operatora A ima oblik:

$$\operatorname{div} A = \vec{e_x} A \vec{e_x} + \vec{e_y} A \vec{e_y} + \vec{e_z} A \vec{e_z} = \alpha^x_x + \alpha^y_y + \alpha^z_z = \operatorname{Tr} A.$$

[1]Tačnost relacije $\sum_{i=1}^n f^i A v_i = \sum_{i=1}^n v_i A f^i$ vidi se iz sledećeg: $f^i = \sum_{k=1}^n g^{ik} v_k$, $v_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} f^k$, gde su (g^{ik}) i (g_{ik}) uzajamno recipročne simetrične matrice, pa je $\sum_{i=1}^n f^i A v_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g^{ik} g_{il} v_k A f^l = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta^k_l v_k A f^l = \sum_{k=1}^n v_k A f^k$.

Na sličan način se pokazuje da je izraz

$$\sum_{i=1}^{n} f^i \wedge (Av_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \wedge (Af^i)$$

invarijanta[2]. Ova vektorska invarijanta operatora A se naziva *rotor* i obeležava[3] sa rot A.

U Descartes-ovom bazisu je

$$\text{rot}\, A = \vec{e_x} \wedge (A\vec{e_x}) + \vec{e_y} \wedge (A\vec{e_y}) + \vec{e_z} \wedge (A\vec{e_z}). \tag{5.1}$$

Kako je $A\vec{e_x} = \alpha_x^x \vec{e_x} + \alpha_x^y \vec{e_y} + \alpha_x^z \vec{e_z}$ dobija se $\vec{e_x} \wedge (A\vec{e_x}) = \alpha_x^x \vec{e_x} \wedge \vec{e_x} + \alpha_x^y \vec{e_x} \wedge \vec{e_y} + \alpha_x^z \vec{e_x} \wedge \vec{e_z} = -\alpha_x^z \vec{e_y} + \alpha_x^y \vec{e_z}$ i slično za ostale članove u sumi (5.1), tako da je, konačno:

$$\text{rot}\, A = (\alpha_y^z - \alpha_z^y)\vec{e_x} + (\alpha_z^x - \alpha_x^z)\vec{e_y} + (\alpha_x^y - \alpha_y^x)\vec{e_z}.$$

5.2 SKALARNA I VEKTORSKA POLJA

Definicija 5.1 *Neka je M otvoren skup* [4] *u $\mathbb{R}^3$ i neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.* Polje nad *M sa vrednostima iz V je preslikavanje $f: M \to V$, koje svakoj tački $m \in M \subset \mathbb{R}^3$, pridružuje vektor $v(m) \in V$. Za $V = \mathbb{R}$, odnosno $V = \mathbb{R}^3$, odnosno $V = \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^{3*}$, polje nad M se zove* skalarno, *odnosno* vektorsko, *odnosno* tenzorsko[5], *respektivno.*

5.2.1 Izvod vektorske funkcije

Ako je svakoj vrednosti promenljive t iz skupa $\{t\}$, po nekom zakonu, pridružen konačan vektor[6] $\vec{r}$, kaže se da je na skupu $\{t\}$ definisana *vektorska funkcija* $\vec{r}(t)$.

Pošto je svaki vektor $\vec{r}$, u Descartes-ovim koordinatama jednoznačno određen sa tri koordinate x, y i z, definisanje vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ je ekvivalentno definisanju tri skalarne funkcije $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

U slučaju kada je skup $\{t\}$ interval na realnoj osi vektorska funkcija se može vizuelizovati: sve krajnje tačke vektorâ $\vec{r}(t)$ obrazuju krivu L u $\mathbb{R}^3$.

Neka je $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, gde je $\Delta t \neq 0$ proizvoljan priraštaj argumenta t. Vektorom $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ data je srednja promena vektorske funkcije na zatvorenom intervalu $[t, t + \Delta t]$.

Izvod vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u datoj tački $m = \vec{r}(t_0)$ je limes vektora $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)]$, kada $\Delta t \to 0$. Izvod vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ se označava sa $\vec{r'}(t)$ ili sa $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.

Iz geometrijskih razmatranja je očigledno da je izvod vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$ u tački $m = \vec{r}(t_0)$ vektor čiji se pravac poklapa sa tangentom na krivu L u toj tački.

Pošto su $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$, $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$ i $\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}$, koordinate vektora $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, jasno je da su koordinate vektora $\vec{r'}(t)$ jednake izvodima funkcija $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, tj. $\vec{r'}(t) = x'(t)\vec{e_x} + y'(t)\vec{e_y} + z'(t)\vec{e_z}$.

---

[2] Sa $a \wedge b$ je označen vektorski proizvod vektora a i b

[3] U literaturi na engleskom jeziku koristi se oznaka curl A.

[4] Za skup M se kaže da je *otvoren* ako je unija otvorenih kugli. *Otvorena kugla* u $\mathbb{R}^3$ je skup $B_\rho(\vec{r}_0) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \| \vec{r}_0 - \vec{r} \| < \rho\}$.

[5] Uobičajeni klasični naziv.

[6] Oznaka $\vec{r}$ podrazumeva da vektor pripada trodimenzionalnom euklidskom prostoru. U ovoj glavi se uglavnom razmatra ovaj specijalni slučaj.

Dakle, izračunavanje izvoda vektorske funkcije se svodi na izračunavanje izvoda izvesnog broja skalarnih funkcija.

Ako se vektorska funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$ shvati kao zakon kretanja čestice duž krive L, izvod $\vec{r'}(t)$ se može interpretirati kao brzina kretanja čestice duž date krive.

Izražavanjem skalarnog, vektorskog i mešovitog proizvoda vektorskih funkcija preko koordinata lako se nalaze pravila diferenciranja. Naime, ako je $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ i $\vec{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$, tada je $(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \sum_{i=1}^{3}(a_i'(t)b_i(t) + a_i(t)b_i'(t))$. Slično, za vektorski proizvod važi: $\{\vec{a}(t) \wedge \vec{b}(t)\}' = \vec{a}'(t) \wedge \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \wedge \vec{b}'(t)$.

5.2.2 Diferencijabilno skalarno polje: gradijent i izvod u pravcu

Na otvorenom skupu $M \subset \mathbb{R}^3$ je definisano skalarno polje ako je svakoj tački $m \in M$, po nekom zakonu, pridružen realan broj (skalar) $\varphi(\vec{r})$, gde je $\vec{r}$ radijus vektor tačke m. Očigledno, pojam skalarnog polja nad M se poklapa sa pojmom realne funkcije čiji je domen skup M.

Temperatura $T(\vec{r})$, pritisak $p(\vec{r})$, gustina $\rho(\vec{r})$ i potencijal elektrostatičkog polja $\varphi(\vec{r})$ su primeri skalarnih polja.

Definicija 5.2 *Skalarno polje φ je* diferencijabilno u tački *m skupa M ako se priraštaj polja $\Delta\varphi$ u m može napisati u obliku:*

$$\Delta\varphi = \operatorname{grad}\varphi \cdot \Delta\vec{r} + o(\| \Delta\vec{r} \|), \tag{5.2}$$

gde je $\Delta\vec{r}$ vektor koji povezuje tačku m i neku drugu dovoljno blisku tačku m', $\Delta\varphi = \varphi(m') - \varphi(m)$ a $\operatorname{grad}\varphi$ *je vektor koji ne zavisi od $\Delta\vec{r}$ i koji se zove* gradijent *polja φ u tački m.*

Lako se pokazuje da, ako je φ diferencijabilno polje u tački m, da je vektor $\operatorname{grad}\varphi$ jedinstven, a kako je gradijent definisan u bazis nezavisnoj formi, to je ovaj vektor invarijanta skalarnog polja.

Skalarno polje φ nad M je *diferencijabilno na M* ako je diferencijabilno u svakoj tački skupa M. Tada je, očigledno, $\operatorname{grad}\varphi$ vektorsko polje nad M.

Izraz $\operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ se naziva *diferencijal* skalarnog polja i označava sa $\mathrm{d}\varphi$.

Ekviskalarna površ je skup tačaka iz M u kojima polje φ ima istu vrednost. Gradijent polja je ortogonalan na ekviskalarnu površ, što nije teško proveriti.

Neka su φ i ϕ diferencijabilna polja na M. Važe sledeće relacije:

$$\operatorname{grad}(\varphi \pm \phi) = \operatorname{grad}\varphi \pm \operatorname{grad}\phi,$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\phi) = \varphi \operatorname{grad}\phi + \phi \operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\varphi}{\phi}\right) = \frac{\phi \operatorname{grad}\varphi - \varphi \operatorname{grad}\phi}{\phi^2} \ (\text{za } \phi \neq 0).$$

Ako je $f(\varphi)$ diferencijabilna funkcija, tada je

$$\operatorname{grad} f = f' \operatorname{grad}\varphi.$$

Izvod skalarnog polja u pravcu

Neka je polje φ definisano na $M \subset \mathbb{R}^3$ i neka je m proizvoljna tačka iz M, a $\vec{e}$ ort sa početkom u tački m. Neka je $m' \in M$ tačka različita od m tako da je vektor $\Delta\vec{r}$ koji povezuje ove dve tačke kolinearan sa ortom $\vec{e}$. Ako postoji granična vrednost $\lim_{\|\Delta\vec{r}\|\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\|\Delta\vec{r}\|}$, gde je $\Delta\varphi = \varphi(m) - \varphi(m')$, tada se ona naziva *izvod polja* φ *u tački* m *u pravcu* $\vec{e}$ i označava se $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{e}}$.

Deljenjem relacije (5.2) sa $\|\Delta\vec{r}\|$ i izračunavanjem granične vrednosti leve i desne strane, kada $\|\Delta\vec{r}\| \to 0$, dobija se relacija koja povezuje gradijent polja i izvod polja u proizvoljnom pravcu $\vec{e}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{e}} = \vec{e}\cdot \operatorname{grad}\varphi.$$

Na osnovu poslednje relacije lako se nalazi izraz za gradijent polja u Descartes-ovom bazisu:

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{e_x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

5.2.3 Diferencijabilno vektorsko polje: divergencija, rotor i izvod u pravcu

Na skupu $M \subset \mathbb{R}^3$ je definisano vektorsko polje ako je svakoj tački $m \in M$, po nekom zakonu, pridružen vektor $\vec{v}(\vec{r})$, gde je $\vec{r}$ radijus vektor tačke m. Očigledno, pojam vektorskog polja nad M se poklapa sa pojmom vektorske funkcije čiji domen je skup M.

Kao što je već rečeno, gradijent proizvoljnog skalarnog polja je vektorsko polje: $\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$, tj. gradijent skalarnom polju pridružuje vektorsko polje. Pored toga, primeri vektorskog polja su magnetno, električno, gravitaciono polje kao i polje brzina fluida.

Definicija 5.3 *Vektorsko polje* $\vec{v}$ *je* diferencijabilno u tački m *skupa* M *ako se priraštaj polja* $\Delta\vec{v}$ *u* m *može napisati u obliku:*

$$\Delta\vec{v} = A\Delta\vec{r} + o(\|\Delta\vec{r}\|), \tag{5.3}$$

gde je $\Delta\vec{r}$ *vektor koji povezuje tačku* m *i neku drugu dovoljno blisku tačku* m', $\Delta\vec{v} = \vec{v}(m') - \vec{v}(m)$ *a* A *je linearni operator koji ne zavisi od* $\Delta\vec{r}$ *(tj. ne zavisi od izbora tačke* m'*).*

Lako se pokazuje da, ako je $\vec{v}$ diferencijabilno polje u tački m, da je operator A, koji se pojavljuje u uslovu diferencijabilnosti (5.3), jedinstven.

Vektorsko polje $\vec{v}$ je *diferencijabilno na* M ako je diferencijabilno u svakoj tački skupa M.

Izvod vektorskog polja u pravcu

Neka je polje $\vec{v}(m)$ definisano na $M \subset \mathbb{R}^3$ i neka je m proizvoljna tačka iz M, a $\vec{e}$ ort sa početkom u tački m. Neka je $m' \in M$ tačka različita od m tako da je vektor $\Delta\vec{r}$ koji povezuje ove dve tačke kolinearan sa ortom $\vec{e}$. Ako postoji granična vrednost $\lim_{\|\Delta\vec{r}\|\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\|\Delta\vec{r}\|}$, gde je $\Delta\varphi = \varphi(m) - \varphi(m')$, tada se ona naziva *izvod polja* $\vec{v}$ *u tački* m *u pravcu* $\vec{e}$ i označava se $\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{e}}$.

Deljenjem relacije (5.3) sa $\|\Delta\vec{r}\|$ i izračunavanjem granične vrednosti leve i desne strane, kada $\|\Delta\vec{r}\| \to 0$, dobija se relacija

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{e}} = A\vec{e}. \tag{5.4}$$

U Descartes-ovom bazisu $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e}} = A\vec{e} = \cos\alpha A\vec{e_x} + \cos\beta A\vec{e_y} + \cos\gamma A\vec{e_z} =$$

$$= \cos\alpha \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e_x}} + \cos\beta \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e_y}} + \cos\gamma \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e_z}} = \cos\alpha \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial \vec{v}}{\partial z},$$

gde je $\vec{e} = \cos\alpha \vec{e_x} + \cos\beta \vec{e_y} + \cos\gamma \vec{e_z}$, tj. α, β i γ su uglovi koje ort $\vec{e}$ zaklapa sa Ox, Oy i Oz osom, respektivno. Ili, ako se sa v_x, v_y i v_z označe koordinate polja $\vec{v}$ u Descartes-ovom bazisu, izvod vektorskog polja u pravcu se može napisati u obliku:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e}} = (\cos\alpha \frac{\partial v_x}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial v_x}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial v_x}{\partial z})\vec{e_x} + (\cos\alpha \frac{\partial v_y}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial v_y}{\partial z})\vec{e_y} +$$

$$+ (\cos\alpha \frac{\partial v_z}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial v_z}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial v_z}{\partial z})\vec{e_z}.$$

Divergencija i rotor vektorskog polja

U Descartes-ovom bazisu, na osnovu relacije (5.4), dobijaju se sledeći izrazi: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e_x}} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = A\vec{e_x}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e_y}} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = A\vec{e_y}$ i $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e_z}} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = A\vec{e_z}$, tj.

$$A\vec{e_x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\vec{e_y} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{e_z},$$

$$A\vec{e_y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{e_x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{e_z},$$

$$A\vec{e_z} = \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\vec{e_y} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{e_z},$$

odakle se, prema osnovnoj formuli reprezentovanja, dobija reprezentaciona matrica $\mathcal{A}$ operatora A:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Neka je polje $\vec{v}$ diferencijabilno na otvorenom skupu $M \subset \mathbb{R}^3$, tj. njegov se priraštaj u proizvoljnoj tački $m \in M$, može napisati u obliku (5.3), gde se operator A, u opštem slučaju, menja od tačke do tačke skupa M (drugim rečima, A zavisi od tačke m ali ne zavisi od $\Delta\vec{r}$)[7]. Dakle, diferencijal (tj. glavni deo priraštaja) $\mathrm{d}\vec{v} = A\Delta\vec{r} \equiv A\mathrm{d}\vec{r}$ vektorskog polja $\vec{v}$ je i sâm vektorsko polje. Naime, svakoj tački m skupa M, pridružuje se odgovarajući linearni operator A, pa se može govoriti i o polju operatorâ na M. *Divergencija*, odnosno *rotor*, vektorskog polja $\vec{v}$ u tački $m \in M$, je divergencija, odnosno rotor, linearnog operatora A: $\operatorname{div}\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div} A$, odnosno $\operatorname{rot}\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rot} A$.

Pošto su divergencija i rotor linearnog operatora invarijante (tj. ne zavise od izbora bazisa) isto važi i za divergenciju i rotor vektorskog polja. Pri tome je $\operatorname{div}\vec{v}$ skalarno, a $\operatorname{rot}\vec{v}$ vektorsko polje.

[7]Kao što je u definiciji 5.3 rečeno, podrazumeva se dovoljno mala okolina tačke m, tj. dovoljno malo $\| \Delta\vec{r} \|$.

Specijalno, u Descartes-ovom bazisu se, iz relacija $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\mathcal{A}$ i $\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}\mathcal{A}$ (jer matrica $\mathcal{A}$ reprezentuje operator A u tom bazisu), dobija

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z})\vec{e_x} + (\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x})\vec{e_y} + (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})\vec{e_z}.$$

Vektorske linije i fluks vektorskog polja

Neka je $\vec{v}(\vec{r})$ jednoznačna, neprekidna i diferencijabilna funkcija na otvorenom skupu $M \subset \mathbb{R}^3$.

Vektorska linija ili *integralna kriva* vektorskog polja $\vec{v}$ je kriva $L(t)$, takva da je u svakoj tački t vektor $\vec{v}(L(t))$ tangentni vektor na L. Dakle, tangenta na vektorsku liniju u svakoj tački imaju pravac vektorskog polja odakle sledi:

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z(x,y,z)}.$$

Rešenjem ove dve diferencijalne jednačine dobija se analitički oblik vektorskih linija polja.

Na primer, vektorske linije polja $\operatorname{grad} f$ su linije koje su u svakoj tački polja ortogonalne na ekviskalarne površi. Tangente na ove linije pokazuju, u svakoj tački, pravac najbrže promene skalarnog polja.

Pored vektorskih linija, pri proučavanju vektorskih polja definiše se i pojam *fluksa vektorskog polja* kroz neku površinu S. Razmatrano vektorsko polje $\vec{v}(\vec{r})$ se smatra konstantnim na infinitezimalnoj površini $\mathrm{d}S$. Ako je $\vec{n}$ ort normale na izabranu pozitivnu stranu elementa $\mathrm{d}S$, onda je $\mathrm{d}\vec{S} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{n}\mathrm{d}S$ odgovarajući površinski vektor. Veličina $\Phi = \int_S \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S}$ se naziva *fluks* ili *protok* vektora $\vec{v}$ kroz površinu S. Ako je $\vec{v}$ brzina fluida, a S površina postavljena normalno na pravac kretanja fluida onda je bukvalno reč o protoku.

Može se pokazati da je divergencija $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r})$ vektorskog polja $\vec{v}(\vec{r})$, u datoj tački m, granična vrednost količnika fluksa polja kroz zatvorenu površinu S (oko tačke m) i zapremine ΔV koju ta površina obuhvata:

$$\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{S}.$$

U skladu s tim, za tačke polja u kojima je $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r}) > 0$ kaže se da su *izvori* vektorskih linija polja, dok su *ponori* vektorskih linija tačke polja za koje je ispunjeno $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r}) < 0$.

Pored fluksa kroz površinu, za opisivanje karakteristika vektorskog polja značajna je i *cirkulacija* polja duž konture. Neka je u vektorskom polju $\vec{v}(\vec{r})$ data kriva u parametarskom obliku: $\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t)\vec{e_i}$. Neka je ms orijentisan luk na toj krivoj, tj. $\vec{r}(t')$ je radijus vektor tačke m, a $\vec{r}(t'')$ radijus vektor tačke s, pri čemu je $t' \le t \le t''$. Neka je, dalje, luk ms podeljen na n intervala tačkama $m = q_0, q_1, \ldots, q_n = s$, tako da su $\vec{r_i}$ vektori položaja odgovarajućih tačaka q_i, dok su $\vec{v_i}$ srednje vrednosti polja $\vec{v}(\vec{r})$ na luku između tačaka q_{i-1} i q_i. *Linijski integral* vektorskog polja $\vec{v}(\vec{r})$ na orijentisanom luku ms definisan je relacijom:

$$\int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{\max\Delta\vec{r}_i\to 0}\sum_{i=1}^n \vec{v_i}\cdot\Delta\vec{r}_i,$$

gde je $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$.

Dakle, linijski integral je suma tangencijalnih komponenti vektora $\vec{v}$ duž luka ms. Na primer, kada je $\vec{F}$ polje sile a ms trajektorija tačke, tada je $\int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ rad sile na datom putu.

Izborom bazisa linijski integral se izračunava na sledeći način:

$$\int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} v_i(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{3} \int_{t'}^{t''} v_i[x_1(t),x_2(t),x_3(t)]\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

Ako je luk zatvoren, linijski integral se naziva *cirkulacija* vektorskog polja $\vec{v}(\vec{r})$ duž konture L i piše se $\oint_L \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Može se pokazati da je projekcija rotora vektorskog polja $\vec{v}(\vec{r})$ u tački m, duž nekog proizvoljnog orta $\vec{n}$, jednaka graničnoj vrednosti količnika cirkulacije vektora $\vec{v}(\vec{r})$ po konturi L male površine ΔS (obuhvaćene datom konturom L i takvom, da je $\vec{n}$ ortogonalan na ΔS) i sâme površine ΔS, kada se ΔS steže oko tačke m:

$$\vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{v}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_L \vec{v}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

tako da obilazak po konturi L i ort $\vec{n}$ čine desni zavrtanj.

5.2.4 Hamilton-ov operator

Linearni operator ∇, koji je u Descartes-ovom bazisu $\{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ definisan relacijom

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{5.5}$$

naziva se *Hamilton-ov operator*[8].

Očigledno je, grad $\equiv \nabla$, tj. $\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \equiv \nabla\varphi(\vec{r})$, dok se izvod skalarnog polja u pravcu orta $\vec{e}$, uz pomoć Hamilton-ovog operatora može napisati u obliku $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{e}} \equiv (\vec{e}\cdot\nabla)\varphi$.

Slično, divergencija, rotor i izvod vektorskog polja $\vec{v}(\vec{r})$ u pravcu orta $\vec{e}$, se mogu izraziti preko Hamilton-ovog operatora: $\operatorname{div}\vec{v} \equiv \nabla\cdot\vec{v}$, $\operatorname{rot}\vec{v} \equiv \nabla\wedge\vec{v}$ i $\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{e}} \equiv (\vec{e}\cdot\nabla)\vec{v}$.

Kompozicije Hamilton-ovog operatora

Neka su skalarno $\varphi(\vec{r})$ i vektorsko $\vec{v}(\vec{r})$ polje najmanje dvaput diferencijabilni na otvorenom skupu $M \subset \mathbb{R}^3$. Tada je $\operatorname{grad}\varphi$ diferencijabilno vektorsko polje na M, $\operatorname{div}\vec{v}$ diferencijabilno skalarno polje, a $\operatorname{rot}\vec{v}$ diferencijabilno vektorsko polje. Dakle, sledeće kompozicije Hamilton-ovog operatora su dozvoljene:

1. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\wedge(\nabla\varphi)$,
2. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\cdot(\nabla\varphi)$,
3. $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} \equiv \nabla(\nabla\cdot\vec{v})$,

[8] Često se koriste *del* i *nabla* kao nazivi simbola ∇

4. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} \equiv \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{v})$,

5. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} \equiv \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$.

Lako se pokazuje (direktnim izračunavanjem u Descartes-ovom ili u bilo kom drugom bazisu, jer je reč o invarijantama) da prva i četvrta kompozicija daju nulti operator, tj. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$ za svako φ i $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ za svako $\vec{v}$.

Kompozicija Hamilton-ovog operatora $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$ je jedan od osnovnih operatora u teoriji polja i označava se kratko $\nabla^2\varphi$ ili $\Delta\varphi$, a naziva se *laplasijan* ili *Laplace-ov operator*. Dakle,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi. \tag{5.6}$$

U Descartes-ovom bazisu je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Kompozicije $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$ i $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}$ su povezane relacijom

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}. \tag{5.7}$$

Tačnost relacije (5.7) se lako proverava direktnim izračunavanjem (u bilo kom bazisu datog prostora).

Rotor i rotacione osobine polja

Ako je $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, gde je $\vec{\omega}$ konstantan vektor, tada je $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$, što se lako proverava direktnim izračunavanjem. Ova relacija ukazuje na vezu rotora polja i rotacionih osobina polja. Ako je $\vec{v}$, na primer, polje brzina fluida tada će fluid u oblastima u kojima je $\operatorname{rot}\vec{v} \neq 0$ pokretati vodenični točak postavljen u razne tačke te oblasti. Naravno, oblasti u kojima je $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ neće izazivati nikakave rotacije pomenutog točka.

Vektorsko polje $\vec{v}$ za koje je $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ u svim tačkama oblasti definisanosti naziva se *bezvrtložno*. Polje koje nije bezvrtložno je *vrtložno* ili *vorteksno*.

Talasna jednačina

Ako je $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, $\nabla \cdot \vec{H} = 0$, $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ i $\nabla \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (gde su $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ i $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$ polja na $X \subset \mathbb{R}^4$)[9] tada polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$ zadovoljavaju *talasnu jednačinu*:

$$\Delta\vec{E} \equiv \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta\vec{H} \equiv \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2},$$

što nije teško proveriti. Naime, s jedne strane je $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = \nabla 0 - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$, dok je s druge strane, $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = \nabla \wedge (-\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \wedge \vec{H} = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$. Slično se pokazuje i za $\vec{H}$.

[9] U teoriji elektromagnetizma ove jednačine se nazivaju *Maxwell-ove*.

Delovanje Hamilton-ovog operatora na proizvode polja

Neka su φ i ϕ diferencijabilna skalarna, a $\vec{v}$ i $\vec{w}$ diferencijabilna vektorska polja na M. Tada su $\varphi\phi$ i $\vec{v}\cdot\vec{w}$ diferencijabilna skalarna, a $\varphi\vec{v}$ i $\vec{v}\wedge\vec{w}$ diferencijabilna vektorska polja. Na njih Hamilton-ov operator može da deluje na sledeće načine: $\nabla(\varphi\phi)\equiv \operatorname{grad}(\varphi\phi)$, $\nabla(\vec{v}\cdot\vec{w})\equiv\operatorname{grad}(\vec{v}\cdot\vec{w})$, $\nabla\cdot(\varphi\vec{v})\equiv\operatorname{div}(\varphi\vec{v})$, $\nabla\wedge(\varphi\vec{v})\equiv\operatorname{rot}\varphi\vec{v}$, $\nabla\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})\equiv\operatorname{div}(\vec{v}\wedge\vec{w})$, $\nabla\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})\equiv\operatorname{rot}(\vec{v}\wedge\vec{w})$. Uzimajući u obzir Leibnitz-ovo pravilo diferenciranja kao i relacije:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}), \tag{5.8}$$

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}\wedge(\vec{c}\cdot\vec{a})=\vec{c}\wedge(\vec{a}\cdot\vec{b}), \tag{5.9}$$

koje važe za proizvoljne vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ iz $\mathbb{R}^3$, dobija se:

1. $\operatorname{grad}(\varphi\phi)\equiv\nabla(\varphi\phi)=\nabla(\overset{\downarrow}{\varphi}\phi)+\nabla(\varphi\overset{\downarrow}{\phi})=\phi\nabla\varphi+\varphi\nabla\phi=\phi\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad}\phi$ (strelica $\downarrow$ ukazuje na objekat delovanja Hamilton-ovog operatora);

2. $\operatorname{grad}(\vec{v}\cdot\vec{w})\equiv\nabla(\vec{v}\cdot\vec{w})=\nabla(\overset{\downarrow}{\vec{v}}\cdot\vec{w})+\nabla(\vec{v}\cdot\overset{\downarrow}{\vec{w}})=(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}+\vec{w}\wedge\operatorname{rot}\vec{v}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w}+\vec{v}\wedge\operatorname{rot}\vec{w}$, (iskorišćena je relacija (5.8): $\vec{a}\to\nabla$ i deluje na $\vec{v}$, odnosno na $\vec{w}$, $\vec{b}\to\vec{v}$, $\vec{c}\to\vec{w}$);

3. $\operatorname{div}(\varphi\vec{v})\equiv\nabla\cdot(\varphi\vec{v})=\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\varphi}\vec{v})+\nabla\cdot(\varphi\overset{\downarrow}{\vec{v}})=\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{div}\vec{v}$;

4. $\operatorname{rot}(\varphi\vec{v})\equiv\nabla\wedge(\varphi\vec{v})=\nabla\wedge(\overset{\downarrow}{\varphi}\vec{v})+\nabla\wedge(\varphi\overset{\downarrow}{\vec{v}})=-(\overset{\downarrow}{\varphi}\vec{v})\wedge\nabla+\varphi(\nabla\wedge\vec{v})=-\vec{v}\wedge\nabla\varphi+\varphi\wedge\operatorname{rot}\vec{v}=$ $-\vec{v}\wedge\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{rot}\vec{v}$, (iskorišćena je linearnost i antisimetričnost vektorskog proizvoda);

5. $\operatorname{div}(\vec{v}\wedge\vec{w})\equiv\nabla\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}=\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\vec{v}}\wedge\vec{w})+\nabla\cdot(\vec{v}\wedge\overset{\downarrow}{\vec{w}})=\vec{w}\cdot(\nabla\wedge\overset{\downarrow}{\vec{v}})-\vec{v}\cdot(\nabla\wedge\overset{\downarrow}{\vec{w}})=\vec{w}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}-\vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{w}$, (iskorišćena je relacija (5.9), $\vec{b}\to\vec{w}$, $\vec{c}\to\vec{v}$;

6. $\operatorname{rot}(\vec{v}\wedge\vec{w})\equiv\nabla\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=\nabla\wedge(\overset{\downarrow}{\vec{v}}\wedge\vec{w})+\nabla\wedge(\vec{v}\wedge\overset{\downarrow}{\vec{w}})=-(\overset{\downarrow}{\vec{v}}\wedge\vec{w})\wedge\nabla-(\vec{v}\wedge\overset{\downarrow}{\vec{w}})\wedge\nabla=$ $-\vec{w}(\nabla\cdot\vec{v})+(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w}+\vec{v}(\nabla\vec{w})=(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v}-\vec{w}\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\operatorname{div}\vec{w}-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w}$, gde je iskorišćena relacija (5.8).

5.2.5 Specijalni tipovi vektorskih polja

Potencijalno polje i skalarni potencijal

Definicija 5.4 *Vektorsko polje* $\vec{v}(\vec{r})$ *je* potencijalno *ako postoji skalarno polje* $\varphi(\vec{r})$, *tako da je* $\vec{v}(\vec{r})=\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ *u svim tačkama polja. Skalarna funkcija* $\varphi(\vec{r})$ *se naziva* skalarni potencijal *polja* $\vec{v}(\vec{r})$ *i određena je do na aditivnu konstantu.*

Umesto sa tri skalarne funkcije $v_x(\vec{r})$, $v_y(\vec{r})$ i $v_z(\vec{r})$, potencijalno polje je potpuno određeno jednom skalarnom funkcijom $\varphi(\vec{r})$. U tom smislu, potencijalno polje je najjednostavnije vektorsko polje.

Ako je potencijal $\varphi(\vec{r})$ neprekidna funkcija, tada integral $\int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_a}} \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}$ ne zavisi od puta integracije nego samo od krajnjih tačaka a i b:

$$\int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} \operatorname{grad}\varphi(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r_a}}^{\vec{r_b}} \mathrm{d}\varphi = \varphi(\vec{r_b}) - \varphi(\vec{r_a}).$$

Jasno, za $a = b$ je gornji integral jednak nuli, tj. cirkulacija potencijalnog polja je jednaka nuli:

$$\oint_L \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = 0.$$

Za rotor potencijalnog polja važi $\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\wedge(\nabla\varphi) = 0$. Može se pokazati da važi i obratno, tj. da iz $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ za svako $\vec{r}$, sledi $\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi$, pa se kaže da je bezvrtložnost polja kriterijum njegove potencijalnosti.

U opštem slučaju, divergencija potencijalnog polja je različita od nule bar u nekim tačkama polja: $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r}) = f(\vec{r})$. Dakle, skalarni potencijal φ zadovoljava *Poisson-ovu diferencijalnu jednačinu*:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \equiv \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi = f(\vec{r}).$$

Na primer, elektrostatički potencijal zadovoljava relaciju $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, gde je $\rho(\vec{r})$ gustina naelektrisanja u tački $\vec{r}$.

Sva polja tipa $\vec{r}f(r)$, gde je f diferencijabilna skalarna funkcija a $r = \|\ \vec{r}\ \|$ su potencijalna, što se može lako proveriti direktnim izračunavanjem.

Solenoidno polje i vektorski potencijal

Definicija 5.5 *Vektorsko polje* $\vec{v}(\vec{r})$ *je* solenoidno *ako postoji vektorsko polje* $\vec{A}(\vec{r})$, *takvo da je* $\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$ *u svim tačkama polja. Vektorska funkcija* $\vec{A}(\vec{r})$ *se naziva* vektorski potencijal *polja* $\vec{v}(\vec{r})$ *i određena je do na gradijent proizvoljne skalarne funkcije* $f(\vec{r})$.

Naime, ako je $\vec{A}(\vec{r})$ vektorski potencijal polja $\vec{v}(\vec{r})$, tada je i $\vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} f(\vec{r})$ vektorski potencijal istog polja. Ova osobina vektorskog potencijala se zove *gradijentna invarijantnost*. Jednoznačnost se postiže nametanjem dopunskih uslova, kao što je npr. *Coulomb-ov kalibracioni uslov*: $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0$.

Divergencija solenoidnog polja je jednaka nuli u svim tačkama polja: $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{A} = (\nabla\wedge\nabla)\cdot\vec{A} = 0$. Može se pokazati da važi i obratno tj. da iz $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r}) = 0$, za svako $\vec{r}$ sledi $\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$. Drugim rečima, potreban i dovoljan uslov solenoidnosti polja je njegova bezizvornost.

Rotor solenoidnog polja je, bar u nekim tačkama polja, različit od nule: $\operatorname{rot}\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) - \Delta\vec{A}(\vec{r}) = \vec{R}(\vec{r}) \neq 0$. Uz Coulomb-ov kalibracioni uslov, poslednja relacija se svodi na

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{R}(\vec{r}),$$

tj. komponente vektorskog potencijala zadovoljavaju Poisson-ove jednačine:

$$\Delta A_x(\vec{r}) = -R_x(\vec{r}), \quad \Delta A_y(\vec{r}) = -R_y(\vec{r}), \quad \Delta A_z(\vec{r}) = -R_z(\vec{r}).$$

Laplace-ovo polje

Vektorsko polje $\vec{v}(\vec{r})$ koje je istovremeno i potencijalno (bezvrtložno: $\operatorname{rot}\vec{v}(\vec{r}) = 0$) i solenoidno (bezizvorno: $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{r}) = 0$) naziva se *Laplace-ovo polje*. Skalarni potencijal φ ovog polja zadovoljava *Laplace-ovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu*:

$$\nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi = 0,$$

čija rešenja su *Laplace-ove* ili *harmonijske funkcije*.

Vektorski potencijal $\vec{A}(\vec{r})$ Laplace-ovog polja zadovoljava jednačinu $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) - \Delta\vec{A}(\vec{r}) = 0$, koja se uz Coulomb-ov kalibracioni uslov svodi na tri Laplace-ove parcijalne diferencijalne jednačine komponenti potencijala $\vec{A}$.

Na primer, iz $\nabla^2\frac{1}{r} = 0$, sledi da je $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ rešenje Laplace-ove jednačine u $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Potencijalno polje $\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\varphi(r) = \operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ je i solenoidno, što nije teško proveriti. Skalarni potencijali elektrostatičkog polja tačkastog naelektrisanja i gravitacionog polja tačkaste mase su oblika $\varphi(r) = \frac{C}{r}$, gde je C odgovarajući faktor proprocionalnosti, a r je udaljenost od odgovarajućeg izvora polja. Dakle, reč je o Laplace-ovim poljima u oblasti $r \neq 0$.

U opštem slučaju, svako vektorsko polje $\vec{v}(\vec{r})$, koje je definisano na celom $\mathbb{R}^3$ i koje iščezava u beskonačnosti, može biti na jedinstven način izraženo kao suma potencijalnog $\vec{v_p}(\vec{r})$ i solenoidnog $\vec{v_s}(\vec{r})$ polja:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v_p}(\vec{r}) + \vec{v_s}(\vec{r}).$$

5.3 KRIVOLINIJSKE KOORDINATE

Neka je M_1 otvoren skup u trodimenzionalnom euklidskom prostoru V_1 i neka su x^1, x^2, x^3 Descartes-ove koordinate u tom prostoru. Dalje, neka je M_2 otvoren skup u trodimenzionalnom euklidskom prostoru V_2 i neka su y^1, y^2, y^3 Descartes-ove koordinate u istom prostoru. Neprekidna i diferencijabilna bijekcija, definisana funkcijama:

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3), \quad i = 1, 2, 3; \tag{5.10}$$

preslikava skup M_2 na skup M_1 i ujedno definiše na M_1 *krivolinijske koordinate* y^1, y^2, y^3: zbog bijektivnosti svakoj tački $m_1 = (x^1, x^2, x^3)^T$ iz M_1 jednoznačno je pridružena trojka brojeva y^1, y^2, y^3. Pored toga, ako se na desnoj strani relacija (5.10) bilo koje dve koordinate fiksiraju, tada iste relacije definišu na M_1 neku krivu (ne mora biti prava). Na primer, za $y^2 = y_0^2$ i $y^3 = y_0^3$, relacijama $x^i = x^i(y^1, y_0^2, y_0^3)$, $(i = 1, 2, 3)$ je određena *koordinatna kriva* y^1 na M_1 (u tačkama krive samo se koordinata y^1 menja). Slično se definišu i preostale dve koordinatne krive na M_1, tako da kroz svaku tačku m_1 iz M_1 prolaze tri koordinatne krive y^1, y^2 i y^3.

Jasno je da izvodi $\frac{\partial x^i}{\partial y^1}$, $(i = 1, 2, 3)$, izračunati u tački m_1, predstavljaju koordinate tangentnog vektora $\vec{r}_1$ na krivu y^1 (u istoj tački). Na sličan način dobijaju se i tangentni vektori $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$ na krive y^2 i y^3. Dakle,

$$\vec{r}_i = \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^i}, \frac{\partial x^2}{\partial y^i}, \frac{\partial x^3}{\partial y^i}\right)^T, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.11}$$

Da bi tangentni vektori $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ formirali bazis u V_1 potrebno je da budu linearno nezavisni, tj. da matrica prelaska $\mathcal{T}$ sa apsolutnog bazisa na $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ bude nesungularna, odnosno da odgovarajuća determinanta bude različita od nule:

$$\det \mathcal{T} = \det \mathcal{T}^T = \det \mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^3} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Drugim rečima, nenultost *Jacobi-jeve determinante*[10] $\mathcal{J}(\frac{x^1,x^2,x^3}{y^1,y^2,y^3})$ je uslov linearne nezavisnosti vektorâ $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$.

Za krivolinijski koordinatni sistem se kaže da je *ortogonalan* ako su bazisni vektori $\vec{r}_i$ definisani relacijom (5.11) ortogonalni u svakoj tački $m_1 \in M_1$.

Za normu bazisnog vektora $\vec{r}_i$ uobičajena je oznaka h_i i naziva se *Lamé-ov koeficijent* ili *parametar*. Ako je bazis $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ ortogonalan tada je $\{\vec{r}^{\,1} = \frac{1}{(h_1)^2}\vec{r}_1,\ \vec{r}^{\,2} = \frac{1}{(h_2)^2}\vec{r}_2,\ \vec{r}^{\,3} = \frac{1}{(h_3)^2}\vec{r}_3\}$ njemu biortogonalan bazis.

5.3.1 Hamilton-ov operator u krivolinijskom koordinatnom sistemu

Gradijent polja

Skalarno polje ϕ na X je funkcija krivolinijskih koordinata y^1, y^2, y^3: $\phi = \phi(y^1, y^2, y^3)$, koja se može posmatrati i kao složena funkcija promenljivih x^1, x^2, x^3, uzimajući u obzir relacije (5.10), tako da je

$$\frac{\partial \phi}{\partial y^i} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.12}$$

Pošto su $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ koordinate vektora $\operatorname{grad}\phi$ u Descartes-ovom bazisu a $\frac{\partial x^k}{\partial y^i}$, $k = 1, 2, 3$; koordinate vektora $\vec{r}_i$, relacije (5.12) se mogu prepisati u obliku

$$\frac{\partial \phi}{\partial y^i} = \vec{r}_i \cdot \operatorname{grad}\phi, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.13}$$

Dakle, gradijent skalarnog polja ϕ u krivolinijskim koordinatama ima oblik:

$$\operatorname{grad}\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial y^i}\,\vec{r}^{\,i}. \tag{5.14}$$

[10]Analitički kriterijum nezavisnosti n funkcija $F_i = F_i(f_1, \ldots, f_n)$, $(i = 1, \ldots, n)$ je nenultost determinante (koja se naziva *Jacobi-jeva determinanta* ili *jakobijan*):

$$\mathcal{J}(\frac{F_1, \ldots, F_n}{f_1, \ldots, f_n}) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial f_1} & \frac{\partial F_2}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial f_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial f_2} & \frac{\partial F_2}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial f_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial f_n} & \frac{\partial F_2}{\partial f_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}$$

u oblasti definisanosti datih funkcija. Funkcije su zavisne ako je jakobijan identički jednak nuli u oblasti definisanosti tih funkcija i tada se bar jedna od njih može izraziti kao funkcija ostalih. Takođe se koriste i oznake $\frac{\mathcal{D}(F_1,\ldots,F_n)}{\mathcal{D}(f_1,\ldots,f_n)}$ i $\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(f_1,\ldots,f_n)}$.

U ortogonalnom krivolinijskom sistemu poslednji izraz se svodi na oblik

$$\operatorname{grad}\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial y^i}\, \vec{r}_i, \tag{5.15}$$

dok je u ortonormiranom bazisu $\{\vec{e_i} = \frac{1}{h_i}\vec{r}_i\}$

$$\operatorname{grad}\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial y^i}\, \vec{e_i}. \tag{5.16}$$

Konačno, Hamilton-ov operator u krivolinijskom koordinatnom sistemu, odnosno u ortogonalnom krivolinjskom koordinatnom sistemu, odnosno u ortonormiranom bazisu krivolinijskog koordinatnog sistema je, respektivno, dat relacijama:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \vec{r^i}\, \frac{\partial}{\partial y^i}; \quad \nabla = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\, \frac{1}{h_i^2}\frac{\partial}{\partial y^i}; \quad \nabla = \sum_{i=1}^{3} \vec{e_i}\, \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{5.17}$$

Izvod skalarnog polja u pravcu

Neka ort $\vec{e}$ ima oblik $\vec{e} = \sum_{i=1}^{3} e^i \vec{r}_i$. Zamenom ove relacije i relacije (5.14) u ranije dobijenu relaciju $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}} = \vec{e} \cdot \operatorname{grad}\phi$ (za izvod skalarnog polja ϕ u pravcu datog orta $\vec{e}$) dobija se

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial y^i}\, e^i. \tag{5.18}$$

Divergencija, rotor i izvod u pravcu vektorskog polja

Neka je $\vec{v}$ diferencijabilno vektorsko polje na domenu X na kome su uvedene krivolinijske koordinate. Tada je:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r^i} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y^i}, \tag{5.19}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r^i} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial y^i}, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{e}} = \sum_{i=1}^{3} e^i \frac{\partial \vec{v}}{\partial y^i}. \tag{5.21}$$

U ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu relacije (5.19) i (5.20) se svode na:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i^2}\vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y^i}, \tag{5.22}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i^2}\vec{r}_i \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial y^i}. \tag{5.23}$$

Ako se sa v^i označe koordinate polja $\vec{v}$ u ortonormiranom bazisu $\{\vec{e_i} = \frac{1}{h_i}\vec{r_i}\}$, nakon niza transformacija [11] dobijaju se sledeći izrazi za divergenciju i rotor:

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial(v^1h_2h_3)}{\partial y^1} + \frac{\partial(v^2h_3h_1)}{\partial y^2} + \frac{\partial(v^3h_1h_2)}{\partial y^3}\right\}, \tag{5.24}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial(v^3h_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(v^2h_2)}{\partial x^3}\right\}\vec{e_1} + \frac{1}{h_3h_1}\left\{\frac{\partial(v^1h_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(v^3h_3)}{\partial x^1}\right\}\vec{e_2} + \frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial(v^2h_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(v^1h_1)}{\partial x^2}\right\}\vec{e_3}. \tag{5.25}$$

5.3.2 Laplace-ov operator u ortogonalnom krivolinijskom sistemu

Kako je $\Delta\phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi$, primenom relacija (5.16) i (5.24) za gradijent i divergenciju u krivolinijskom ortogonalnom koordinatnom sistemu dobija se izraz za laplasijan:

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial y^1}) + \frac{\partial}{\partial y^2}(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial y^2}) + \frac{\partial}{\partial y^3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial y^3})\right\}. \tag{5.26}$$

5.3.3 Cilindrični i sferni koordinatni sistemi

Cilindrični i sferni koordinatni sistemi su primeri ortogonalnih krivolinijskih koordinatnih sistema i pogodni su za analitičko opisivanje sistema cilindrično, odnosno sferno simetričnih. U nastavku će biti uvedene oznake x, y i z za koordinate x^1, x^2 i x^3, respektivno. Pri razmatranju cilindričnih, odnosno sfernih koordinata koristiće se uobičajene oznake ρ, φ i z, odnosno r, φ i θ, umesto y^1, y^2 i y^3, respektivno.

1. *Cilindrični koordinatni sistem* je definisan relacijama:

$$x = \rho\,\cos\varphi,\ y = \rho\,\sin\varphi,\ z = z;\quad \rho\in[0,+\infty),\ \varphi\in[0,2\pi),\ z\in(-\infty,+\infty), \tag{5.27}$$

   tako da su odgovarajući tangentni vektori (u Descartes-ovom bazisu):

$$\vec{r}_\rho = (\frac{\partial x}{\partial\rho}, \frac{\partial y}{\partial\rho}, \frac{\partial z}{\partial\rho})^T = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T,$$

$$\vec{r}_\varphi = (\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \frac{\partial z}{\partial\varphi})^T = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)^T,$$

$$\vec{r}_z = (\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z})^T = (0,0,1)^T.$$

   Lamé-ovi koeficijenti su $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_z = 1$, pa je

$$\{\vec{e_\rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T,\ \vec{e_\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^T,\ \vec{e_z} = (0,0,1)^T\},$$

[11] Poći od relacije (5.22) i iskoristiti $\nabla y^i = \vec{e}_i/h_i$; $\vec{e}_1 = h_2h_3\,(\nabla y^2 \wedge \nabla y^3)$, $\vec{e}_2 = h_3h_1\,(\nabla y^3 \wedge \nabla y^1)$, $\vec{e}_3 = h_1h_2\,(\nabla y^1 \wedge \nabla y^2)$; $\nabla\cdot(v^1\vec{e}_1) = \nabla\cdot(v^1h_2h_3\,(\nabla y^2\wedge\nabla y^3)) = \nabla(v^1h_2h_3)\,[(nablay^2 \wedge \nabla y^3 + v^1h_2h_3\nabla\cdot(\nabla y^2 \wedge \nabla y^3) = \nabla(v^1h_2h_3)\,\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3} = \{\sum_{i=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial y^i}(v^1h_2h_3)\}\cdot\frac{\vec{e}_1}{h_2h_3} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial y^1}(v^1h_2h_3)$, $\nabla\cdot(v^2\vec{e}_2) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial y^2}(v^2h_1h_3)$, $\nabla\cdot(v^3\vec{e}_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial y^3}(v^3h_1h_2)$. Slično, polazeći od (5.23) dobija se formula za rotor.

odgovarajući ortonormirani bazis, dok je biortogonalni bazis $\{\vec{r}^{\rho}, \vec{r}^{\varphi}, \vec{r}^{z}\}$ bazisa $\{\vec{r}_{\rho}, \vec{r}_{\varphi}, \vec{r}_{z}\}$, u istoj reprezentaciji dat kolonama:

$$\vec{r}^{\rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T,\ \vec{r}^{\varphi} = (-\frac{1}{\rho}\sin\varphi, \frac{1}{\rho}\cos\varphi, 0)^T,\ \vec{r}^{z} = (0,0,1)^T.$$

Zamenom dobijenih izraza u relacije (5.16), (5.24), (5.25) i (5.26) dobijaju se sledeći izrazi za gradijent i laplasijan skalarnog polja ϕ i divergenciju i rotor vektorskog polja $\vec{v}$ u cilindričnim koordinatama:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e_z},\\
\Delta\phi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2},\\
\operatorname{div}\vec{v} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v^\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v^\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v^z}{\partial z},\\
\operatorname{rot}\vec{v} &= (\frac{1}{\rho}\frac{\partial v^z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v^\varphi}{\partial z})\vec{e_\rho} + (\frac{\partial v^\rho}{\partial z} - \frac{\partial v^z}{\partial\rho})\vec{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho v^\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial v^\rho}{\partial\varphi})\vec{e_z}.
\end{aligned}$$

Iz relacija $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ i $z = z$, koje definišu prelazak sa Descartes-ovih na cilindrične koordinate je očigledno da je za tačke sa z ose ugao φ neodređen. Ovakve tačke se nazivaju *singularnim tačkama* date transformacije.

2. *Sferni koordinatni sistem* je definisan relacijama:

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi,\ y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi,\ z = r\,\cos\theta;\ r\in[0,+\infty),\ \varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in[0,\pi], \tag{5.28}$$

odakle se jasno vidi da je koordinatni početak je singularna tačka transformacije, tj. u koordinatnom početku veza između x, y, z i r, φ, θ nije obostrano jednoznačna.

Odgovarajući vektori $\vec{r_r}$, $\vec{r_\varphi}$ i $\vec{r_\theta}$ su, u Descartes-ovom bazisu, reprezentovani kolonama:

$$\begin{pmatrix}\sin\theta\,\cos\varphi\\ \sin\theta\,\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix}-\sin\theta\,\sin\varphi\\ \sin\theta\,\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix}\cos\theta\,\cos\varphi\\ \cos\theta\,\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix},$$

respektivno. Odgovarajući Lamé-ovi koeficijenti su $h_r = 1$, $h_\varphi = r\,\sin\theta$ i $h_\theta = r$, pa je

$$\{\,\vec{e_r} = \begin{pmatrix}\sin\theta\,\cos\varphi\\ \sin\theta\,\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix},\ \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix},\ \vec{e_\theta} = \begin{pmatrix}\cos\theta\,\cos\varphi\\ \cos\theta\,\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\},$$

odgovarajući ortonormirani bazis, dok je

$$\{\,\vec{r^r} = \begin{pmatrix}\sin\theta\,\cos\varphi\\ \sin\theta\,\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix},\ \vec{r^\varphi} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix},\ \vec{r^\theta} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}\cos\theta\,\cos\varphi\\ \cos\theta\,\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\}$$

biortogonalni bazis bazisa $\{\vec{r_r},\, \vec{r_\varphi},\, \vec{r_\theta}\}$.

Zamenom dobijenih bazisnih vektora u relacije (5.16), (5.24), (5.25) i (5.26) dobijaju se sledeći izrazi za gradijent i laplasijan skalarnog polja ϕ i divergenciju i rotor vektorskog polja $\vec{v}$ u cilindričnim koordinatama:

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta},$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2},$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v^r) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\left\{\frac{\partial v^\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,v^\theta)\right\},$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}(\frac{\partial(\sin\theta\,v^\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial v^\theta}{\partial\varphi})\,\vec{e_r} + (\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v^r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rv^\varphi)}{\partial r})\,\vec{e_\theta} + (\frac{\partial(rv^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v^r}{\partial\theta})\,\vec{e_\varphi}\right\}.$$

5.4 INTEGRALNI TEOREMI

5.4.1 Gauss-ov teorem

Teorem 5.1 *Neka je V zapremina obuhvaćena zatvorenom površinom S u vektorskom polju $\vec{v}(\vec{r})$ koje ima neprekidan izvod. Tada važi*

$$\oint_S \vec{v}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}V, \tag{5.29}$$

tj. fluks vektorskog polja kroz zatvorenu površinu jednak je izdašnosti obuhvaćene zapremine.

Posledice Gauss-ovog teorema

1. Neka je $\vec{v}(\vec{r}) = f(\vec{r})\,\vec{c}$, gde je f diferencijabilna funkcija, a $\vec{c}$, proizvoljan, konstantan vektor. Kako je $\operatorname{div} f(\vec{r})\,\vec{c} = \nabla(f(\vec{r})\,\vec{c}) = \vec{c}\cdot\operatorname{grad} f$, relacija (5.29), se može napisati u obliku $\vec{c}\cdot\oint_S f(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{S} = \vec{c}\cdot\int_V \operatorname{grad} f(\vec{r})\,\mathrm{d}V$, tj. (uzimajući u obzir proizvoljnost vektora $\vec{c}$):

$$\oint_S f(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{grad} f(\vec{r})\,\mathrm{d}V.$$

2. Za $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c}$, gde je $\vec{w}$ diferencijabilno vektorsko polje, a $\vec{c}$ proizvoljan, konstantan vektor, formula (5.29) se svodi na oblik

$$\oint_S \mathrm{d}\vec{S}\wedge\vec{w}(\vec{r}) = \oint_V \operatorname{rot}\vec{w}(\vec{r})\,\mathrm{d}V,$$

jer je $\operatorname{div}\vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c} = \nabla\cdot\vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c} = (\nabla\wedge\vec{w}(\vec{r}))\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\operatorname{rot}\vec{w}(\vec{r})$ dok je s druge strane $(\vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \vec{c}\cdot(\mathrm{d}\vec{S}\wedge\vec{w}(\vec{r}))$.

3. Za $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{c}\,T(\vec{r})$, gde je T polje tenzora ranga dva, a $\vec{c}$ proizvoljan konstantan vektor, formula (5.29) se transformiše u oblik

$$\oint_S \mathrm{d}\vec{S}\,T(\vec{r}) = \oint_V \operatorname{div} T(\vec{r})\,\mathrm{d}V.$$

4. *Green-ovi teoremi*:

   (a) Za $\vec{v}(\vec{r}) = \psi(\vec{r})\,\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})$, gde su ψ i φ proizvoljne skalarne funkcije je $\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{r}) = \mathrm{div}\,(\psi \mathrm{grad}\,\varphi) = \nabla\cdot(\psi\nabla\varphi) = \nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\psi}\nabla\varphi) + \nabla\cdot(\psi\nabla\overset{\downarrow}{\varphi}) = \nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi = \mathrm{grad}\,\psi\cdot \mathrm{grad}\,\varphi + \psi\Delta\varphi$, pa relacija (5.29) u ovom specijalnom slučaju ima sledeći oblik

   $$\oint_S \psi \mathrm{grad}\,\varphi\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\mathrm{grad}\,\psi\cdot\mathrm{grad}\,\varphi + \psi\Delta\varphi)\,\mathrm{d}V, \tag{5.30}$$

   i naziva se *prvi Green-ov teorem*.

   (b) Direktna posledica prvog Green-ovog teorema je tzv. *simetrični oblik Green-ovog teorema* ili *drugi Green-ov teorem*:

   $$\oint_S (\psi \mathrm{grad}\,\varphi - \varphi \mathrm{grad}\,\psi)\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\,\mathrm{d}V, \tag{5.31}$$

   koji se dobija oduzimanjem relacije $\oint_S \varphi \mathrm{grad}\,\psi\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi + \varphi\Delta\psi)\,\mathrm{d}V$ od relacije (5.30).

5.4.2 Stokes-ov teorem

Teorem 5.2 *Neka je S ma koja dvostrana nezatvorena površina oivičena konturom L u vektorskom polju $\vec{v}(\vec{r})$ koje ima neprekidne izvode. Tada je*

$$\oint_L \vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{S}, \tag{5.32}$$

tj. cirkulacija vektorskog polja po zatvorenoj konturi L jednaka je fluksu rotora istog polja kroz bilo koju površinu koja je oivičena konturom L.

Posledice Stokes-ovog teorema

1. Za $\vec{v}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{c}$, gde je f diferencijabilna funkcija a $\vec{c}$ konstantan proizvoljan vektor, je $\mathrm{rot}\,(f(\vec{r})\vec{c}) = \nabla\wedge f(\vec{r})\vec{c} = (\mathrm{grad}\,f(\vec{r}))\wedge\vec{c}$. Dalje je $(\mathrm{grad}\,f(\vec{r})\wedge\vec{c})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \vec{c}\cdot(\mathrm{d}\vec{S}\wedge\mathrm{grad}\,f(\vec{r}))$, pa u ovom slučaju Stokes-ov teorem ima oblik

   $$\oint_L f(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_S \mathrm{d}\vec{S}\wedge\mathrm{grad}\,f(\vec{r}).$$

2. Za $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c}$, gde je $\vec{w}(\vec{r})$ diferencijabilno vektorsko polje, a $\vec{c}$ konstantan proizvoljan vektor, je $\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,(\vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c}) = \nabla\wedge(\vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c})$, pa je $\mathrm{d}\vec{S}\cdot(\nabla\wedge(\vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c})) = (\mathrm{d}\vec{S}\wedge\nabla)\cdot(\vec{w}(\vec{r})\wedge\vec{c}) = (\mathrm{d}\vec{S}\wedge\nabla)\wedge\vec{w})\cdot\vec{c}$, tako da se konačno dobija

   $$\oint_L \mathrm{d}\vec{r}\wedge\vec{w}(\vec{r}) = \int_S (\mathrm{d}\vec{S}\wedge\nabla)\wedge\vec{w}(\vec{r}).$$

Bibliografija

[1] И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, "Наука" Москва (1971).

[2] S. Lipschutz, *Linear Algebra*, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, Inc. (1974).

[3] P. R. Halmos, *Finite-dimensional Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York Inc. (1974).

[4] А. И. Кострикин, Ј. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, "Наука" Москва (1986).

[5] V. A. Ilyin and E. G. Poznyak, *Fundamentals of Mathematical Analysis, Part 2*, Mir Publishers Moscow (1982).